

筑波大学 集中講義 2025
原子核理論特講 II 「ハズオンで学ぶ核力の基礎」
— レポート課題 —

福井 徳朗 *†

6 March 2025

概要

講義と関連する問題をいくつか用意した。すべてやる必要はなく、できる範囲で構わない。

目次

1	データの取得および可視化	1
1.1	結合エネルギーの実験値の可視化	1
1.2	散乱位相差データの可視化	1
2	核物質と飽和性	2
3	テンソル力および重陽子	4
3.1	テンソル演算子	4
3.2	重陽子の基本的性質	6
4	中間子論とボソン交換ポテンシャル	6
4.1	座標空間表示のボソン交換ポテンシャルの導出	6
4.2	各中間子の寄与	7
付録 A	Fraunhofer 回折: ミニマム	7

* 九州大学基幹教育院

† tokuro.fukui@artsci.kyushu-u.ac.jp

付録 B	重陽子に関する様々な観測量	8
B.1	密度と平均二乗根半径	8
B.2	電気四重極モーメント	11
B.3	磁気双極子モーメント	12
B.4	漸近 D/S 状態比	13
付録 C	座標空間での OBEP の導出	13
C.1	擬スカラー中間子交換	13

1 データの取得および可視化

1.1 結合エネルギーの実験値の可視化

Exercise 1.1 — 実験値を可視化しよう (難易度 ★☆☆☆☆) —

様々な核種に対する実験により、原子核の質量は精密に測定されている。例えば Brookhaven National Laboratory の National Nuclear Data Center (NNDC) の [ウェブサイト \[1\]](#) では、原子核の質量はもちろん、核構造に関するデータ (スピン・パリティ・エネルギーなどの分光学的情報、遷移強度、半減期など) および核反応に関するデータ (断面積、スピン偏極量など) も入手可能である。

上記のように質量から結合エネルギーを求めることは可能だが、結合エネルギーの A 依存性を見るには多くの核のデータを処理する必要がある、これは面倒である。実は NNDC のウェブサイトには、[NuDat 3.0 の Advanced Cross-Variable Plot \[2\]](#) という便利な機能がある。これを使えば、ブラウザ上で E/A を A の関数としてプロットでき、データもダウンロード可能である。[チュートリアル \[3\]](#) を参考に、 E/A を A の関数としてプロットしてみよう。

1.2 散乱位相差データの可視化

Exercise 1.2 — 散乱位相差のデータを入力しよう (難易度 ★☆☆☆☆) —

現実的な位相差のデータを入力しよう。位相差のデータは、例えば Radboud University Nijmegen の [NN-OnLine](#) というサービスで入手できる [4]。

`NN interaction > Phase shifts > Phase shifts versus energy: numbers` とたどると、位相差の具体的な情報を入力するページへ進む。そこで、以下を選択するとよい:

- Models: `PWA: PWA93`
- Interaction: `neutron-proton`
- T_{\min} : `0` MeV
- T_{\max} : `350` MeV (350 MeV までが上限のようである)
- Intervals: `10` MeV
- Give the phase: `1S0`

なお、現実の 2 核子系の散乱位相差は 2 核子系のスピン・アイソスピンおよび軌道角運動量の状態に強く依存する。今は簡単のため、陽子-中性子のスピンシングレット S 波散乱

(1S_0) のみを考えることにしよう。もちろん、他のチャネルの位相差 (これも NN-OnLine で入手可能) も分析してもらって構わない。

また、NN-OnLine では位相差を可視化することも可能である。

NN interaction > Phase shifts > Phase shifts versus energy: figure
と進むとよい。

2 核物質と飽和性

核物質は核力および原子核の性質の理解に役立つ描像の一つであり、以下の理想化・近似に基づいている:

1. 質量数 A が十分大きい原子核を考え、その表面効果を見捨てる
2. 陽子間の Coulomb 力を無視する

また、陽子数 Z と中性子数 N が等しい (すなわち $Z = N = A/2$ である) 核物質を対称核物質と呼び、中性子だけで構成される (すなわち $N = A$ である) 核物質を非対称核物質や中性子物質と呼ぶ。後者は中性子星の物理とも密接に関連しており、精力的に研究されている。核力、核物質、そして中性子星の関わりについては、入門的な紹介文 [5] および、最近の専門的なレビュー論文 [6, 7] を挙げておく。以下では対称核物質を扱い、これを単に核物質と呼ぶことにする。

核物質を特徴づける性質は飽和性である (図 1 参照)。すなわち、核物質の 1 核子あたりのエネルギー ϵ/A を核子数密度 ρ の関数で表した時、ある密度でエネルギーが極小値をとることを核物質の飽和性と呼ぶ。特に、エネルギーが極小値となる飽和点 $(\rho, \epsilon/A) = (\rho_0, \epsilon_0/A)$ は、後述するように経験的に知られている。また、 ρ_0 は通常密度と呼ばれる。

経験的な飽和点は実験事実に基づいて以下のように決められている [8]:

- 結合エネルギーの飽和性: $\epsilon_0/A \sim -16$ MeV,
- 密度の飽和性: $\rho_0 \sim 0.17$ fm $^{-3}$.

まず ϵ_0/A について考えよう。結合エネルギー E とは $\epsilon = -E$ という関係があるが、重い核における結合エネルギーの飽和性 $-E/A \sim -8$ MeV は核物質のエネルギーの飽和性とはおよそ 2 倍異なる。この理由は、表面効果および Coulomb 力を無視した対称核物質を考えているからである。つまり、 $\epsilon_0/A \sim -16$ MeV という値は半経験的質量公式の体積項の大きさに対応している [8]。なお、質量公式のパラメータは多くの核の E/A に対する実験値と整合するように、体積項、表面項、対称項、Coulomb 項を最適化して決められている。

次に密度の飽和性を詳しく見てみよう。原子核の電子による弾性散乱実験を通した陽子分布 (電荷

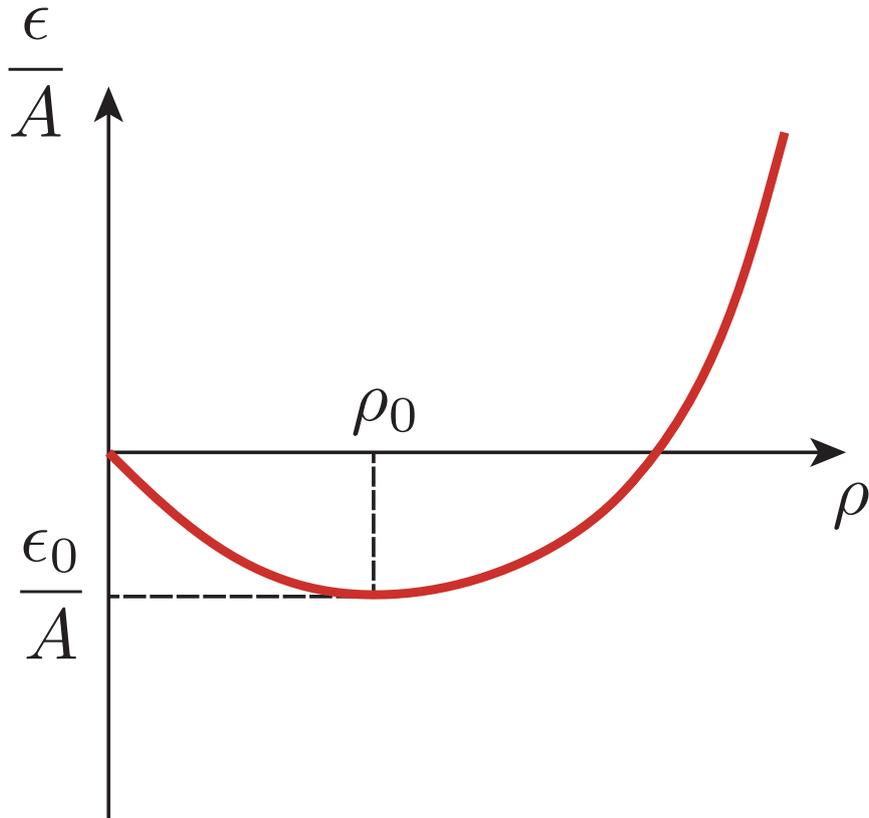


図1 対称核物質における1核子あたりのエネルギー ϵ/A を密度 ρ の関数として表したときの概念図。

分布) の決定や核子-原子核弾性散乱実験による物質半径の決定から、原子核の半径 R は以下で記述されることが知られている (Exercise 2.1 参照):

$$R = r_0 A^{1/3}, \quad r_0 \sim 1.1-1.3 \text{ fm.} \quad (1)$$

核半径 R が $A^{1/3}$ に比例するということから密度の飽和性が導かれる。すなわち、質量数 A の球形原子核を仮定したとき、その密度 ρ は質量数に依存せず、 $\rho = A/(4\pi R^3/3) = 3/(4\pi r_0^3) \sim 0.17 \text{ fm}^{-3}$ で与えられる。

Exercise 2.1 — 電子散乱データから核半径を見積もってみよう (難易度 ★★☆☆☆)—

1. 電子と原子核の弾性散乱断面積の実験値を入手し、散乱角度の関数としてプロットしよう。以下では例として、電子と ^{40}Ca の弾性散乱断面積の角度分布の実験値を扱う。実験データは Brookhaven National Laboratory の National Nuclear Data Center と International Atomic Energy Agency の Nuclear Data Section が共同で管理してい

る EXFOR [9] から入手可能である。反応の情報として、例えば以下を入れるとよい (それ以外は空欄でよい):

- Target: Ca-40 (周期表からインタラクティブに選択可能。この例では ^{40}Ca)
- Reaction: e,* (反応の種類をインタラクティブに選択可能。e,* は電子によるあらゆる反応を意味する)

検索結果から、20-CA-40(E,EL)20-CA-40,,DA という反応の実験値がまとめられた csv ファイルがダウンロードできる。電子の入射エネルギーも Energy として eV の単位で表示されている。

csv ファイルの中には、例えば以下の情報が含まれている:

- ANG (A DEG) : 散乱角度 (deg)
- DATA (B/SR) : 微分散乱断面積 (b/sr)
- ERR-S (B/SR) : 微分散乱断面積の不確かさ (b/sr)

これらをプロットした結果が図 2 である。

2. 付録 A を参考に、Fraunhofer 回折に基づいて原子核の半径 R を求めよう。そのために、1. の断面積における隣り合う極大値あるいは隣り合う極小値に対応する角度を求める。図 2 では隣り合う極小値を与える角度 θ_1 と θ_2 を図示している。これを用いて、付録 A の式 (A.3) から R を算出しよう。
3. 求めた R および対象としての原子核の質量 A を用いて、式 (1) から r_0 を求めよう。

3 テンソル力および重陽子

3.1 テンソル演算子

テンソル演算子を再掲する:

$$\begin{aligned} S_{12}(\hat{r}) &= 3(\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \hat{r})(\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \hat{r}) - \boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2 \\ &= 2 \left[3(\boldsymbol{S} \cdot \hat{r})^2 - S^2 \right] \\ &= \sqrt{24\pi} \left[[\sigma_1(1) \otimes \sigma_1(2)]_2 \otimes Y_2(\hat{r}) \right]_{00}. \end{aligned} \quad (2)$$

変数等の定義は講義資料を参考にしてほしい。

Exercise 3.1 — テンソル演算子を理解しよう (難易度 ★★☆☆) —

1. 式 (2) の 2 つ目の等号を証明しよう。すなわち、2 核子の合成スピン $\boldsymbol{S} = (\boldsymbol{\sigma}_1 + \boldsymbol{\sigma}_2)/2$ を用いて S_{12} を表そう。これには右辺を変形して左辺になることを示すとよい。なお、

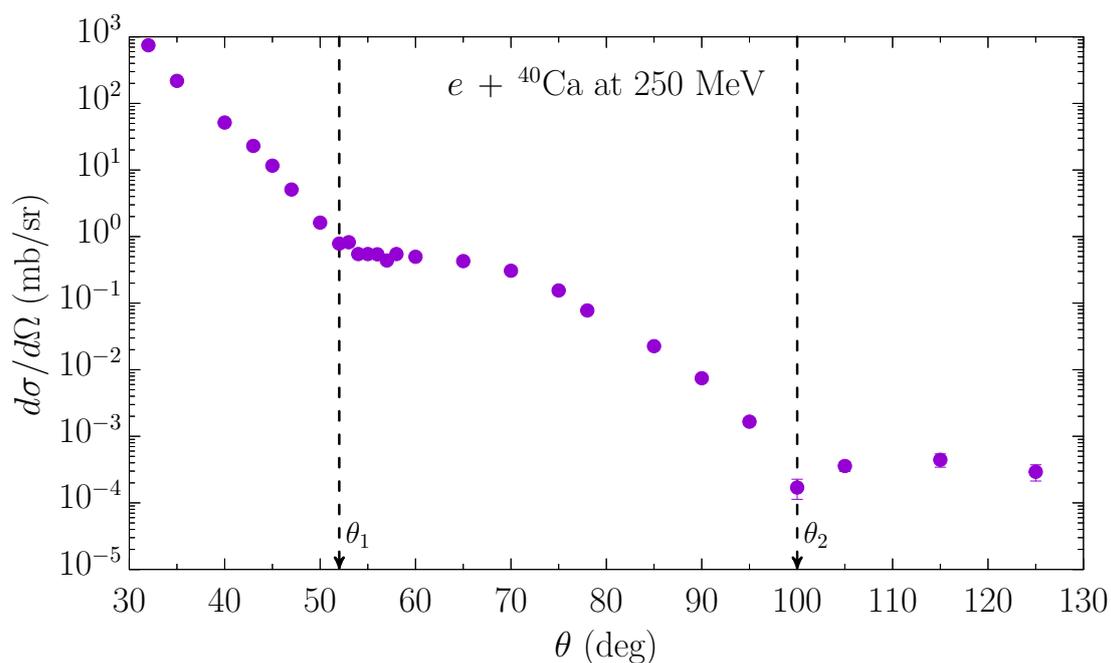


図2 EXFOR からダウンロードした電子と ${}^{40}\text{Ca}$ の弾性散乱断面積の角度分布の実験値 [10]。Fraunhofer 回折に基づいて原子核半径を見積もるため、断面積が極小となる角度 θ_1 および θ_2 を矢印で示した。

スピンベクトル σ に関する関係式

$$(\sigma \cdot \mathbf{a})(\sigma \cdot \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + i(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \sigma, \quad (3)$$

を用いるとよい。ここで、 σ は Pauli 行列 σ_i を各成分に持つ 3 次元ベクトルであり、また、 \mathbf{a} と \mathbf{b} も任意の 3 次元ベクトルである。

2. 第三回講義資料の付録 A を参考に、式 (2) の 3 つ目の等号を証明しよう。すなわち、2 階の球面調和関数 $Y_{2\mu}$ を用いて \mathcal{S}_{12} を表そう ($\mu = 0, \pm 1, \pm 2$)。

3.2 重陽子の基本的性質

Exercise 3.2 — 重陽子に関する様々な観測量を計算しよう (難易度 ★★★★★) —

付録 B を参考に、以下の重陽子の観測量を計算しよう。

- 平均二乗根半径 r_d
- 電気四重極モーメント Q_d
- 磁気双極子モーメント μ_d
- 漸近 D/S 状態比 η

テンソル力を含む核力であれば、何を用いてもよい (例えば G3RS ポテンシャル [11])。計算に用いたプログラムを計算結果とともに提出しよう。

4 中間子論とボソン交換ポテンシャル

4.1 座標空間表示のボソン交換ポテンシャルの導出

Exercise 4.1 — (座標空間でのボソン交換ポテンシャルを導出しよう ★★★★★) —

非相対論的な運動量空間でのポテンシャルをフーリエ変換することにより、座標空間でのポテンシャルを求めよう。簡単のため、形状因子は考慮する必要はない。付録 C に擬スカラー中間子交換の例を示したので、それを参考に、スカラー中間子交換やベクトル中間子交換についても計算しよう。

また、スカラーおよびベクトル中間子交換において、運動量空間での非局所ポテンシャルは、座標空間での速度依存項 (微分項) に対応する。これは、文献 [12] に従えば、

$$(2\pi)^{-3} \int d\mathbf{q} \frac{q^2/4 + Q^2}{q^2 + m_\alpha^2} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} = -\frac{m_\alpha}{8\pi} [\nabla^2 Y(m_\alpha r) + Y(m_\alpha r) \nabla^2], \quad (4)$$

と表現される。式 (4) を証明しよう。ただし、 $\mathbf{q} = \mathbf{p}' - \mathbf{p}$, $\mathbf{Q} = (\mathbf{p}' + \mathbf{p})/2$ であり、 \mathbf{p} (\mathbf{p}') は始状態 (終状態) における 2 核子の相対運動量である。さらに、 $Y(m_\alpha r) = \exp(-m_\alpha r)/(m_\alpha r)$ であり、ラプラシアンは軌道角運動量演算子 \mathbf{L} を用いて、

$$\nabla^2 = \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} r - \frac{\mathbf{L}^2}{r^2}, \quad (5)$$

で与えられる。

4.2 各中間子の寄与

Exercise 4.2 — 重陽子における各中間子の寄与を分析しよう (難易度 ★★★★★)—

1. 重陽子の基底状態エネルギーに、各中間子交換がどのくらい寄与しているのかを見積もろう。まずは簡単のため、 π 中間子交換のみで重陽子を解く場合を考えよう。このとき、 π 中間子交換相互作用 \hat{V}_π の寄与は、一般化固有値問題を解いて求めた重陽子の固有状態 $|\Phi_{\text{deuteron}}\rangle$ を用いて、相互作用の期待値 $\langle \Phi_{\text{deuteron}} | \hat{V}_\pi | \Phi_{\text{deuteron}} \rangle$ を計算すればよい。同様に、運動量エネルギーの期待値 $\langle \Phi_{\text{deuteron}} | \hat{T}_{\text{rel}} | \Phi_{\text{deuteron}} \rangle$ を求め、相互作用の期待値と運動量エネルギーの期待値の和が、一般化固有値問題を解いて得られたエネルギー固有値と等しいことを確認しよう。
2. 中心力 (C)、スピン軌道力 (SO)、テンソル力 (T) の期待値 $\langle \Phi_{\text{deuteron}} | \hat{V}_{\alpha X} | \Phi_{\text{deuteron}} \rangle$ ($X = C, SO, T$) を計算し、各中間子の交換がどのように寄与しているのかを分析しよう。1 に続いて、まずは簡単のために π 中間子交換のみを考慮した計算から始めるとよい。その場合、 $\langle \Phi_{\text{deuteron}} | \hat{V}_{\pi SO} | \Phi_{\text{deuteron}} \rangle = 0$ である。
3. 上記 1 および 2 を、考慮する OBEP を変えて繰り返そう。まず最初に 1 および 2 を、 π 中間子交換のみを考慮して調べた場合、次は交換する中間子を増やし、その影響を議論しよう。

付録 A Fraunhofer 回折: ミニマム

電子と原子核の弾性散乱を考える (図 3 を参照)。散乱角度を θ , 核半径を R とする。弾性散乱であるので、 $|\mathbf{k}| = |\mathbf{k}'|$ であり、移行運動量は $\mathbf{q} = \mathbf{k}' - \mathbf{k}$ で定義され (厳密には移行波数である)、その大きさは $q = 2k \sin(\theta/2)$ である。入射エネルギーを E とすると、それに対応する波数ベクトルの大きさは $k = E/\hbar c$ であり、入射波の波長は $\lambda = 2\pi/k$ である。以下では、Fraunhofer 回折に基づいて核半径を導出する方法について簡潔にまとめる。Fraunhofer 回折の詳細は例えば文献 [8] が参考になる。

• 行路差

$$d = 2R \sin \theta. \quad (\text{A.1})$$

• 行路差が波長の整数倍で強め合う/弱め合う条件

$$2R \sin \theta = n\lambda. \quad (\text{A.2})$$

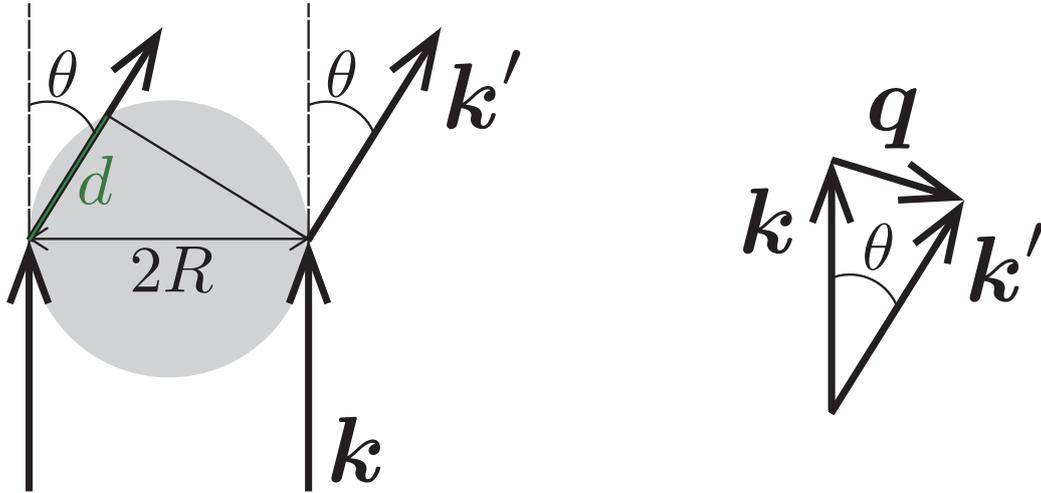


図3 (左) 電子による原子核の弾性散乱の概念図および (右) 移行角運動量。

- 断面積の極大 (極小) が現れる条件

$$R\Delta q \sim \pi, \quad (\text{A.3})$$

$$\Delta q = q_2 - q_1 = 2k \left[\sin\left(\frac{\theta_2}{2}\right) - \sin\left(\frac{\theta_1}{2}\right) \right]. \quad (\text{A.4})$$

付録 B 重陽子に関する様々な観測量

B.1 密度と平均二乗根半径

まず、一般の A 核子系を考えよう。1 体密度は

$$\rho(\mathbf{x}) = \sum_i^A \langle \Phi | \delta(\mathbf{x} - \mathbf{r}_i) | \Phi \rangle, \quad (\text{B.1})$$

で与えられる。ただし、 $|\Phi\rangle$ は重心運動を分離したあとの A 体系の波動関数であり、 \mathbf{r}_i は重心から測った i 番目の核子の座標である。密度の積分値は核子数に等しくなる:

$$A = \int d\mathbf{x} \rho(\mathbf{x}). \quad (\text{B.2})$$

また、密度を用いて、平均二乗根半径 (物質半径とも呼ばれる) は以下で定義される:

$$\sqrt{\langle x^2 \rangle} = \left[\frac{\int d\mathbf{x} x^2 \rho(\mathbf{x})}{\int d\mathbf{x} \rho(\mathbf{x})} \right]^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{A}} \left[\int d\mathbf{x} x^2 \rho(\mathbf{x}) \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (\text{B.3})$$

続いて重陽子を考えよう。式 (B.1) より、1 体密度は

$$\rho(\mathbf{x}) = \rho_p(\mathbf{x}) + \rho_n(\mathbf{x}), \quad (\text{B.4})$$

$$\rho_N(\mathbf{x}) = \langle \Phi_{\text{deuteron}} | \delta(\mathbf{x} - \mathbf{r}_N) | \Phi_{\text{deuteron}} \rangle \quad (\text{N} = p, n), \quad (\text{B.5})$$

となる。ただし、 ρ_p と \mathbf{r}_p (ρ_n と \mathbf{r}_n) はそれぞれ、陽子 (中性子) の 1 体密度と重陽子の重心から測った座標である。また、陽子数 Z と中性子数 N は

$$Z = \int d\mathbf{x} \rho_p(\mathbf{x}), \quad N = \int d\mathbf{x} \rho_n(\mathbf{x}), \quad (\text{B.6})$$

で与えられる。ここで、陽子と中性子の相対距離を \mathbf{r} とおき、陽子と中性子の質量差を無視すると、

$$\mathbf{r}_p = \frac{1}{2}\mathbf{r}, \quad \mathbf{r}_n = -\frac{1}{2}\mathbf{r}. \quad (\text{B.7})$$

の関係がある。簡単のために、これらを一つの変数 \mathbf{x}_N を使って表そう:

$$\mathbf{x}_N = \begin{cases} \frac{1}{2}\mathbf{r} & (\text{N} = p), \\ -\frac{1}{2}\mathbf{r} & (\text{N} = n). \end{cases} \quad (\text{B.8})$$

次に S 波と D 波の混合状態である重陽子の波動関数を導入しよう:

$$|\Phi_{\text{deuteron}}\rangle = \left| R_0 \left[Y_0 \otimes \xi_1^{(\sigma)} \right]_{1m_j} \xi_{00}^{(\tau)} \right\rangle + \left| R_2 \left[Y_2 \otimes \xi_1^{(\sigma)} \right]_{1m_j} \xi_{00}^{(\tau)} \right\rangle. \quad (\text{B.9})$$

変数の定義等は第三回の講義資料に記してある。式 (B.9) を (B.5) に代入すると、

$$\begin{aligned} \rho_N(\mathbf{x}) &= \langle R_0 | x^{-2} \delta(x - x_N) | R_0 \rangle \left\langle \left[Y_0 \otimes \xi_1^{(\sigma)} \right]_{1m_j} \left| \delta(\hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{x}}_N) \right| \left[Y_0 \otimes \xi_1^{(\sigma)} \right]_{1m_j} \right\rangle \\ &+ \langle R_0 | x^{-2} \delta(x - x_N) | R_2 \rangle \left\langle \left[Y_0 \otimes \xi_1^{(\sigma)} \right]_{1m_j} \left| \delta(\hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{x}}_N) \right| \left[Y_2 \otimes \xi_1^{(\sigma)} \right]_{1m_j} \right\rangle \\ &+ \langle R_2 | x^{-2} \delta(x - x_N) | R_0 \rangle \left\langle \left[Y_2 \otimes \xi_1^{(\sigma)} \right]_{1m_j} \left| \delta(\hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{x}}_N) \right| \left[Y_0 \otimes \xi_1^{(\sigma)} \right]_{1m_j} \right\rangle \\ &+ \langle R_2 | x^{-2} \delta(x - x_N) | R_2 \rangle \left\langle \left[Y_2 \otimes \xi_1^{(\sigma)} \right]_{1m_j} \left| \delta(\hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{x}}_N) \right| \left[Y_2 \otimes \xi_1^{(\sigma)} \right]_{1m_j} \right\rangle \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

を得る。ただし、

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = r^{-2} \delta(r - r') \delta(\hat{\mathbf{r}} - \hat{\mathbf{r}}'), \quad (\text{B.11})$$

を用いた。式 (B.10) の動径成分は

$$\langle R_l | x^{-2} \delta(x - x_N) | R_{l'} \rangle = \frac{2}{x} u_l(2x) u_{l'}(2x), \quad (\text{B.12})$$

と求まる。一方、角度積分は

$$\begin{aligned} & \left\langle \left[Y_l \otimes \xi_1^{(\sigma)} \right]_{1m_j} \left| \delta(\hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{x}}_N) \right| \left[Y_{l'} \otimes \xi_1^{(\sigma)} \right]_{1m_j} \right\rangle \\ &= \sum_{mm'M_S} (lm1M_S|1m_j) (l'm'1M_S|1m_j) Y_{lm}^*(\hat{\mathbf{x}}) Y_{l'm'}(\hat{\mathbf{x}}), \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

である。なお、 $\hat{\mathbf{x}}_N = \pm \hat{\mathbf{r}}$ であるので、引数が $-\hat{\mathbf{r}}$ となる球面調和関数が現れるが、

$$Y_{lm}(-\hat{\mathbf{r}}) = (-)^l Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}}) \quad (\text{B.14})$$

という球面調和関数の性質より、 $l = 0, 2$ という今の場合では引数の符号を気にする必要はない。

式 (B.12) と (B.13) を式 (B.10) に代入して、以下の密度の表式を得る:

$$\begin{aligned} \rho_N(\mathbf{x}) &= \frac{2}{x^2} u_0(2x) u_0(2x) \sum_{M_S} (001M_S|1m_j) (001M_S|1m_j) Y_{00}^*(\hat{\mathbf{x}}) Y_{00}(\hat{\mathbf{x}}) \\ &+ \frac{2}{x^2} u_0(2x) u_2(2x) \sum_{m'M_S} (001M_S|1m_j) (2m'1M_S|1m_j) Y_{00}^*(\hat{\mathbf{x}}) Y_{2m'}(\hat{\mathbf{x}}) \\ &+ \frac{2}{x^2} u_2(2x) u_0(2x) \sum_{mM_S} (2m1M_S|1m_j) (001M_S|1m_j) Y_{2m}^*(\hat{\mathbf{x}}) Y_{00}(\hat{\mathbf{x}}) \\ &+ \frac{2}{x^2} u_2(2x) u_2(2x) \sum_{mm'M_S} (2m1M_S|1m_j) (2m'1M_S|1m_j) Y_{2m}^*(\hat{\mathbf{x}}) Y_{2m'}(\hat{\mathbf{x}}). \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

これは 3 次元の密度を描画するには有用かもしれないが、やや煩雑である。そこで、角度平均した密度 (球形の密度とも呼ばれる) を導入しよう:

$$\bar{\rho}(x) \equiv \frac{\int d\hat{\mathbf{x}} \rho(\mathbf{x})}{\int d\hat{\mathbf{x}} \mathbb{1}} = \frac{1}{4\pi} \int d\hat{\mathbf{x}} \rho(\mathbf{x}). \quad (\text{B.16})$$

すると、式 (B.15) より、

$$\bar{\rho}_N(x) = \frac{1}{2\pi} x^{-2} \left[|u_0(2x)|^2 + |u_2(2x)|^2 \right], \quad (\text{B.17})$$

を得る。したがって、重陽子の球形密度は

$$\bar{\rho}(x) = \bar{\rho}_p(x) + \bar{\rho}_n(x) = \frac{1}{\pi} x^{-2} \left[|u_0(2x)|^2 + |u_2(2x)|^2 \right], \quad (\text{B.18})$$

となる。

式 (B.3) と (B.18) より、重陽子の平均二乗根半径は以下で計算できる:

$$\sqrt{\langle x^2 \rangle} = \frac{1}{2} \left[\int dr r^2 |u_0(r)|^2 + |u_2(r)|^2 \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (\text{B.19})$$

ガウス関数展開法を u_l に用いれば、式 (B.19) の積分は解析的に実行できる:

$$\begin{aligned}\int drr^2 |u_0(r)|^2 &= \sum_{ij} c_i^{(0)} c_j^{(0)} N_i^{(0)} N_j^{(0)} \int drr^4 e^{-(\nu_i + \nu_j)r^2} \\ &= \frac{3}{8} \sum_{ij} c_i^{(0)} c_j^{(0)} N_i^{(0)} N_j^{(0)} \sqrt{\frac{\pi}{(\nu_i + \nu_j)^5}},\end{aligned}\quad (\text{B.20})$$

$$\begin{aligned}\int drr^2 |u_2(r)|^2 &= \sum_{ij} c_i^{(2)} c_j^{(2)} N_i^{(2)} N_j^{(2)} \int drr^8 e^{-(\nu_i + \nu_j)r^2} \\ &= \frac{105}{32} \sum_{ij} c_i^{(2)} c_j^{(2)} N_i^{(2)} N_j^{(2)} \sqrt{\frac{\pi}{(\nu_i + \nu_j)^9}}.\end{aligned}\quad (\text{B.21})$$

B.2 電気四重極モーメント

文献 [13] に従うと、重陽子の電気四重極モーメント Q_d は以下で与えられる:

$$Q_d = \langle j, m = j | \hat{Q} | j, m = j \rangle, \quad (\text{B.22})$$

$$\hat{Q}(\mathbf{r}_0) = 4\sqrt{\frac{\pi}{5}} r_0^2 Y_{20}(\hat{\mathbf{r}}_0). \quad (\text{B.23})$$

ただし、 $|j, m = j\rangle$ は式 (B.9) において、 $m_j = j = 1$ の波動関数である。また、電気四重極演算子 \hat{Q} の引数 \mathbf{r}_0 は重陽子の重心から測った陽子の座標である。すなわち、陽子と中性子の相対座標 \mathbf{r} とは、 $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}/2$ の関係がある。このような座標が現れるのは、電荷を持つ陽子だけが電気四重極モーメントに寄与することに由来する。

さて、 $m_j = j = 1$ とした式 (B.9) を式 (B.22) のブラとケットに代入し、多少の計算を行うと、

$$Q_d = \frac{\sqrt{2}}{10} \int drr^2 u_0(r) u_2(r) - \frac{1}{20} \int drr^2 u_2(r) u_2(r), \quad (\text{B.24})$$

を得る。この表式から明らかなように、 D 波成分 u_2 が存在しない場合、すなわちテンソル力が存在しない場合、 Q_d はゼロである。

やはりガウス関数展開法を u_l に用いることにしよう。このとき、式 (B.24) の第一項の積分は

$$\begin{aligned}\int drr^2 u_0(r) u_2(r) &= \sum_{ij} c_i^{(0)} c_j^{(2)} N_i^{(0)} N_j^{(2)} \int drr^6 e^{-(\nu_i + \nu_j)r^2} \\ &= \frac{15}{16} \sum_{ij} c_i^{(0)} c_j^{(2)} N_i^{(0)} N_j^{(2)} \sqrt{\frac{\pi}{(\nu_i + \nu_j)^7}},\end{aligned}\quad (\text{B.25})$$

となる。第二項は式 (B.21) で計算できる。

B.3 磁気双極子モーメント

文献 [13] に従うと、重陽子の磁気双極子モーメント μ_d は以下で与えられる:

$$\mu_d = \langle j, m = j | \hat{\mu}_z | j, m = j \rangle. \quad (\text{B.26})$$

ただし、 $\hat{\mu}_z$ は磁気双極子演算子 $\boldsymbol{\mu}_d$ の第三成分である。具体的に計算するために、まず $\boldsymbol{\mu}_d$ を定義しておこう。これは核磁子 μ_N を使って

$$\boldsymbol{\mu}_d = \left(g_p \mathbf{s}_p + g_n \mathbf{s}_n + \frac{1}{2} \mathbf{l} \right) \mu_N, \quad (\text{B.27})$$

で与えられる。ただし、 g_N は核子の g 因子であり、陽子と中性子に対して、それぞれ $g_p = 5.586$ 、 $g_n = -3.826$ である [14]。核子のスピン演算子 \mathbf{s}_N は Pauli のスピン行列を用いて $\mathbf{s}_N = \boldsymbol{\sigma}_N/2$ で与えられ、 \mathbf{l} は軌道角運動量演算子である。2 核子の合成スピン $\mathbf{S} = \mathbf{s}_p + \mathbf{s}_n$ を用いると、 $g_p \mathbf{s}_p + g_n \mathbf{s}_n = (g_p + g_n) \mathbf{S}/2 + (g_p - g_n)(\mathbf{s}_p - \mathbf{s}_n)/2$ と書けるため、式 (B.27) は、

$$\boldsymbol{\mu}_d = \left[\frac{1}{2}(g_p + g_n) \mathbf{j} + \frac{1}{2}(1 - g_p - g_n) \mathbf{l} + \frac{1}{2}(g_p - g_n)(\mathbf{s}_p - \mathbf{s}_n) \right] \mu_N, \quad (\text{B.28})$$

と書き換えることができる。ただし、全スピン $\mathbf{j} = \mathbf{l} + \mathbf{S}$ を用いた。

式 (B.28) と \mathbf{j} の内積から、式 (B.26) の $\hat{\mu}_z$ が計算できる。また、磁気双極子モーメント μ_d は μ_N を単位とすることが多いため、 $\hat{\mu}_z/\mu_N$ を考えよう:

$$\begin{aligned} \frac{\hat{\mu}_z}{\mu_N} &= \frac{\hat{j}_z}{\hat{j}^2} \boldsymbol{\mu}_d \cdot \mathbf{j} \\ &= \frac{\hat{j}_z}{\hat{j}^2} \frac{1}{2}(g_p + g_n) \hat{j}^2 + \frac{1}{2}(1 - g_p - g_n) \mathbf{l} \cdot \mathbf{j} + \frac{1}{2}(g_p - g_n)(\mathbf{s}_p - \mathbf{s}_n) \cdot \mathbf{j}. \end{aligned} \quad (\text{B.29})$$

これを式 (B.26) に代入し、ブラとケットには $m_j = j = 1$ とした式 (B.9) を用いると、多少の計算の結果、

$$\frac{\mu_d}{\mu_N} = \frac{1}{2}(g_p - g_n) + \frac{3}{4}(1 - g_p - g_n) P_D, \quad (\text{B.30})$$

を得る。ただし、 D 波状態確率 P_D は、 S 波状態確率 P_S とともに以下で定義される:

$$P_S = \langle R_0 | R_0 \rangle = \sum_{ij} c_i^{(0)} c_j^{(0)} (\beta_{ij})^{\frac{3}{2}} \quad (\text{B.31})$$

$$P_D = \langle R_2 | R_2 \rangle = \sum_{ij} c_i^{(2)} c_j^{(2)} (\beta_{ij})^{\frac{5}{2}}. \quad (\text{B.32})$$

ここで、

$$\beta_{ij} = \frac{2\sqrt{\nu_i \nu_j}}{\nu_i + \nu_j} = \frac{2b_i b_j}{b_i^2 + b_j^2}, \quad (\text{B.33})$$

である。これらは $P_S + P_D = 1$ を満たす。

B.4 漸近 D/S 状態比

波動関数の動径成分 u_l は、 r が大きな漸近領域で

$$u_0(r) \sim A_S e^{-\gamma r}, \quad (\text{B.34})$$

$$u_2(r) \sim A_D e^{-\gamma r} \left[1 + \frac{3}{\gamma r} + \frac{3}{(\gamma r)^2} \right], \quad (\text{B.35})$$

と振る舞うことが知られており [15], 球ハンケル関数の具体形と対応する。ただし、 γ は相対論的な運動学に基づき、

$$m_d = m_p + m_n - B_d \sqrt{m_p^2 - \gamma^2} + \sqrt{m_n^2 - \gamma^2}, \quad (\text{B.36})$$

を満たすように定義される。ここで m_p と m_n はそれぞれ陽子と中性子の質量、 m_d は重陽子の質量、 B_d は重陽子の束縛エネルギーである。文献 [15] に従うと、 $B_d = 2.224575$ MeV を用いて、

$$\gamma = 0.2315380 \text{ fm}^{-1}, \quad (\text{B.37})$$

と定まる。

漸近的な S 波と D 波の振幅はそれぞれ A_S と A_D で与えられる。その比を漸近 D/S 状態比と呼び、

$$\eta = A_D/A_S, \quad (\text{B.38})$$

で定義する。この η は、適当な漸近領域で u_0 と u_2 をそれぞれ、式 (B.34) と (B.35) でフィットしたときの係数として求まる。

実験的には、例えば (d, p) 反応を用いて η を導出することができる [16].

付録 C 座標空間での OBEP の導出

C.1 擬スカラー中間子交換

運動量空間での非相対論的な擬スカラー中間子交換ポテンシャルを再掲する:

$$w_{\text{ps}}(\mathbf{q}) = -\frac{1}{(2\pi)^3} \frac{g_{\text{ps}}^2}{4M^2} \frac{(\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \mathbf{q})(\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \mathbf{q})}{q^2 + m_{\text{ps}}^2} \hat{V}_\tau. \quad (\text{C.1})$$

ただし、 g_{ps} は結合定数、 M は核子の平均質量、 m_{ps} は擬スカラー中間子の質量、 \mathbf{q} は運動量移行、 $\boldsymbol{\sigma}_i$ はスピン演算子であり、 \hat{V}_τ はポテンシャルのアイソスピン部分である。なお、 w_{ps} が含む $(2\pi)^{-3}$ は、

$$\langle \mathbf{p}' | \mathbf{p} \rangle = \delta(\mathbf{p}' - \mathbf{p}), \quad (\text{C.2})$$

$$\langle \mathbf{r} | \mathbf{p} \rangle = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}, \quad (\text{C.3})$$

という定義を採用していることに起因する。ここで、 \mathbf{p} (\mathbf{p}') は始状態 (終状態) における 2 核子の相対運動量であり、 \mathbf{r} は相対座標を表す。

式 (C.1) のスピンを含む部分を、テンソル演算子 \mathcal{S}_{12} を用いて

$$(\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \mathbf{q})(\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \mathbf{q}) = \frac{q^2}{3} [\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2 + \mathcal{S}_{12}(\hat{\mathbf{q}})], \quad (\text{C.4})$$

と書き換えておくと便利である。すると、式 (C.1) は

$$w_{\text{ps}}(\mathbf{q}) = -\frac{1}{(2\pi)^3} \frac{g_{\text{ps}}^2}{12M^2} \left[\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2 - \frac{m_{\text{ps}}^2}{q^2 + m_{\text{ps}}^2} \boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2 + \frac{q^2}{q^2 + m_{\text{ps}}^2} \mathcal{S}_{12}(\hat{\mathbf{q}}) \right] \hat{V}_\tau, \quad (\text{C.5})$$

と変形できる。この表式のフーリエ変換を考えよう。なお、式 (C.5) の第一項のように、わざわざ伝播関数を含まない形に書き換えた理由は後述する。

座標空間でのポテンシャル v_{ps} は、 w_{ps} のフーリエ変換として与えられる:

$$\begin{aligned} v_{\text{ps}}(\mathbf{r}) &= \int d\mathbf{q} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} w_{\text{ps}}(\mathbf{q}) \\ &= -\frac{1}{(2\pi)^3} \frac{g_{\text{ps}}^2}{12M^2} \int d\mathbf{q} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} \left[\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2 - \frac{m_{\text{ps}}^2}{q^2 + m_{\text{ps}}^2} \boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2 + \frac{q^2}{q^2 + m_{\text{ps}}^2} \mathcal{S}_{12}(\hat{\mathbf{q}}) \right]. \end{aligned} \quad (\text{C.6})$$

まず、右辺第一項の積分からデルタ関数を得る:

$$\frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{q} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} = \delta(\mathbf{r}). \quad (\text{C.7})$$

式 (C.6) の右辺第二項の積分は、

$$\begin{aligned} \int d\mathbf{q} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} \frac{m_{\text{ps}}^2}{q^2 + m_{\text{ps}}^2} &= 4\pi \int_0^\infty dq \frac{q^2}{q^2 + m_{\text{ps}}^2} \frac{\sin(qr)}{qr} \\ &= \frac{4\pi}{r} \frac{1}{2i} \int_{-\infty}^\infty dz \frac{ze^{iz}}{z^2 + (m_{\text{ps}}r)^2}, \\ &= \frac{4\pi}{r} \frac{1}{2i} 2\pi i \lim_{z \rightarrow im_{\text{ps}}r} (z - im_{\text{ps}}r) \frac{ze^{iz}}{(z + im_{\text{ps}}r)(z - im_{\text{ps}}r)} \\ &= 2\pi^2 m_{\text{ps}} Y(m_{\text{ps}}r), \end{aligned} \quad (\text{C.8})$$

$$Y(m_{\text{ps}}r) = \frac{e^{-m_{\text{ps}}r}}{m_{\text{ps}}r}, \quad (\text{C.9})$$

と計算できる。ここで、最初の等号では角度積分を実行し、2つ目の等号では $z = qr$ という変数変換と $\sin z = [\exp(iz) - \exp(-iz)]/(2i)$ を用いた。また、3つ目の等号では、被積分関数が持つ 1 位の極に対して留数定理を適用した。

式 (C.6) の右辺第三項の積分を実行するために、以下の関係式を用いる:

$$e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} = 4\pi \sum_{\lambda\mu} i^\lambda j_\lambda Y_{\lambda\mu}^*(\hat{\mathbf{q}}) Y_{\lambda\mu}(\hat{\mathbf{r}}), \quad (\text{C.10})$$

$$\mathcal{S}_{12}(\hat{\mathbf{q}}) = \sqrt{24\pi} \left[[\sigma_1(1) \otimes \sigma_1(2)]_2 \otimes Y_2(\hat{\mathbf{r}}) \right]_{00}. \quad (\text{C.11})$$

式 (C.10) は Rayleigh 展開と呼ばれ、 j_λ は球ベッセル関数、 $Y_{\lambda\mu}$ は球面調和関数である。これらを式 (C.6) の右辺第三項の積分に代入すると、

$$\begin{aligned}
& \int d\mathbf{q} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} \frac{q^2}{q^2 + m_{\text{ps}}^2} \mathcal{S}_{12}(\hat{\mathbf{q}}) \\
&= -4\pi \mathcal{S}_{12}(\hat{\mathbf{r}}) \int_0^\infty dq \frac{q^4}{q^2 + m_{\text{ps}}^2} \left[\left\{ \frac{3}{(qr)^3} - \frac{1}{qr} \sin(qr) \right\} - \frac{3}{(qr)^2} \cos(qr) \right] \\
&= 4\pi \left[\frac{6}{ir^3} \int_{-\infty}^\infty dz \frac{ze^{iz}}{z^2 + (m_{\text{ps}}r)^2} - \frac{2}{ir^3} \int_{-\infty}^\infty dz \frac{z^3 e^{iz}}{z^2 + (m_{\text{ps}}r)^2} - \frac{6}{r^3} \int_{-\infty}^\infty dz \frac{z^2 e^{iz}}{z^2 + (m_{\text{ps}}r)^2} \right] \\
&= 4\pi \left[\frac{6}{ir^3} \lim_{z \rightarrow im_{\text{ps}}r} (z - im_{\text{ps}}r) \frac{ze^{iz}}{(z + im_{\text{ps}}r)(z - im_{\text{ps}}r)} \right. \\
&\quad - \frac{2}{ir^3} \lim_{z \rightarrow im_{\text{ps}}r} (z - im_{\text{ps}}r) \frac{z^3 e^{iz}}{(z + im_{\text{ps}}r)(z - im_{\text{ps}}r)} \\
&\quad \left. - \frac{6}{r^3} \lim_{z \rightarrow im_{\text{ps}}r} (z - im_{\text{ps}}r) \frac{z^2 e^{iz}}{(z + im_{\text{ps}}r)(z - im_{\text{ps}}r)} \right] \\
&= 2\pi m_{\text{ps}}^2 \left[1 + \frac{3}{m_{\text{ps}}r} + \frac{3}{(m_{\text{ps}}r)^2} \right] \frac{e^{-m_{\text{ps}}r}}{r} \\
&= 2\pi M^2 m_{\text{ps}} Z(m_{\text{ps}}r), \tag{C.12}
\end{aligned}$$

を得る。ただし、

$$Z(m_{\text{ps}}r) = \left(\frac{m_{\text{ps}}}{M} \right)^2 \left[1 + \frac{3}{m_{\text{ps}}r} + \frac{3}{(m_{\text{ps}}r)^2} \right] Y(m_{\text{ps}}r), \tag{C.13}$$

である。式 (C.12) の計算過程は、式 (C.8) のそれに似ており、1つ目の等号では角度積分を実行し、2つ目の等号では変数変換を行い、3つ目の等号では留数定理を用いた。

以上より、座標空間での擬スカラー中間子交換ポテンシャルとして

$$v_{\text{ps}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{12} \frac{g_{\text{ps}}^2}{4\pi} \left[\left\{ \left(\frac{m_{\text{ps}}}{M} \right)^2 m_{\text{ps}} Y(m_{\text{ps}}r) - \frac{4\pi}{m_{\text{ps}}^3} \delta(\mathbf{r}) \right\} \boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2 + m_{\text{ps}} Z(m_{\text{ps}}r) \mathcal{S}_{12}(\hat{\mathbf{r}}) \right] \hat{V}_\tau, \tag{C.14}$$

を導出することができる。式 (C.14) のデルタ関数は核子を点粒子として近似したことに起因するが、通常、そのような項はポテンシャルから無視するⁱ。その理由は、物理的には、核力の斥力芯のために波動関数は原点付近で振幅を持たず、原点でのポテンシャルの振る舞いは2核子の状態に寄与しないと期待されるからである。また、計算上は、3次元デルタ関数の特異性のため、このままでは Schrödinger 方程式が解けないという問題を避けるためである。式 (C.5) のように書き換えたのは、このように接触項を差し引いたポテンシャルを得るためである。さらに、核子の有限サイズ効果を反映した形状因子を w_{ps} に導入することで、原点付近でのポテンシャルの寄与は抑制される。形状因子の扱いについては第4回講義資料を参考にしてほしい。

ⁱ カイラル有効場理論では、中間子交換ポテンシャルに接触項を含むものをそのまま用いる (ただし正則化関数を乗じたもの)。その代わりに、摂動の次数に対応した接触項を加えることでデルタ関数の影響を相殺させ、加えた接触項の結合定数 (low-energy constants; LECs) を実験値との比較から決定する。

参考文献

- [1] National Nuclear Data Center, Brookhaven National Laboratory, <https://www.nndc.bnl.gov/>.
- [2] National Nuclear Data Center, Brookhaven National Laboratory, Advanced Cross-Variable Plot, <https://www.nndc.bnl.gov/nudat3/advancedplot/>.
- [3] National Nuclear Data Center, Brookhaven National Laboratory, Tutorial of Advanced Cross-Variable Plot, <https://www.nndc.bnl.gov/nudat3/guide/#cvPlotOverview>.
- [4] Theoretical High Energy Physics Group, Radboud University Nijmegen, NN-OnLine, <https://nn-online.org/>.
- [5] 日本物理学会, 「ブラックホールにならない中性子星, 分岐点は？」物理学物理学 70 の不思議, <https://www.jps.or.jp/books/gakkaishi/70wonders.php>.
- [6] G. Baym, T. Hatsuda, T. Kojo, P. D. Powell, Y. Song, and T. Takatsuka, Rep. Prog. Phys. **81**, 056902 (2018).
- [7] J. Lattimer, Ann. Rev. Nucl. Part. Sci. **71**, 433 (2021).
- [8] A. Bohr and B. Mottelson, *NUCLEONIC INTERACTIONS AND NUCLEAR POTENTIAL*, Nuclear Structure No. 1 (World Scientific, 1998), pp. 138–188.
- [9] National Nuclear Data Center, Brookhaven National Laboratory and Nuclear Data Section, International Atomic Energy Agency, EXFOR, <https://www-nds.iaea.org/exfor/>.
- [10] M. Croissiaux, R. Hofstadter, A. E. Walker, M. R. Yearian, D. G. Ravenhali, B. C. Clark, and R. Herman, Phys. Rev. **137**, B865 (1965).
- [11] R. Tamagaki, Prog. Theor. Phys. **39**, 91 (1968).
- [12] V. G. J. Stoks, R. A. M. Klomp, C. P. F. Terheggen, and J. J. de Swart, Phys. Rev. C **49**, 2950 (1994).
- [13] A. Bohr and B. Mottelson, *NUCLEONIC INTERACTIONS AND NUCLEAR POTENTIAL*, Nuclear Structure No. 1 (World Scientific, 1998), pp. 332–344, 3-3 MATRIX ELEMENTS OF ELECTROMAGNETIC MOMENTS.
- [14] Physical Measurement Laboratory, National Institute of Standards and Technology, NIST Standard Reference Database, <https://physics.nist.gov/cuu/Constants/index.html>.
- [15] R. Machleidt, Phys. Rev. C **63**, 024001 (2001).
- [16] N. L. Rodning and L. D. Knutson, Phys. Rev. C **41**, 898 (1990).