

筑波大学 集中講義 2025
原子核理論特講 II 「ハズオンで学ぶ核力の基礎」
— 第四回 「中間子論」 —

福井 徳朗 *†

3 March 2025

概要

核力を 1 つの中間子の交換で表現したポテンシャル (one-boson exchange potential; OBEP) について学ぶ。交換される中間子の性質 (質量やスピン・アイソスピン) が核力にどのように反映されるのかに主眼を置く。また、重陽子を OBEP に基づいて記述する。

目次

1 中間子論とボソン交換ポテンシャル	1
1.1 中間子の種類とボソン交換ポテンシャルの概要	1
1.2 ラグランジアンとファインマンルール	2
1.3 運動量空間でのボソン交換ポテンシャル	2
1.4 座標空間でのボソン交換ポテンシャル	3
1.5 形状因子の導入	5
2 ボソン交換ポテンシャルと重陽子	7
2.1 一般化固有値問題	7
2.2 Bonn-OBEP-A に対するコメント	9
付録 A 自然単位系と数値計算上の注意	11
付録 B ボソン交換ポテンシャルとガウス関数展開法	11

* 九州大学基幹教育院

† tokuro.fukui@artsci.kyushu-u.ac.jp

B.1	擬スカラー中間子交換に対する 2 体行列要素	12
B.2	スカラー中間子交換に対する 2 体行列要素	14
B.3	ベクトル中間子交換に対する 2 体行列要素	18
付録 C	ボソン交換ポテンシャルのパラメータ	21
C.1	山口らのボソン交換ポテンシャル	21
C.2	Bonn グループによるボソン交換ポテンシャル	22
付録 D	動径積分の解析解	23
D.1	解析解その 1	23
D.2	解析解その 2	24

1 中間子論とボソン交換ポテンシャル

1.1 中間子の種類とボソン交換ポテンシャルの概要

これまででも中間子論は折に触れて言及してきた。今回扱うのは one-boson exchange potential (OBEP) と呼ばれるもので、質量やスピン・アイソスピンなどが異なる中間子を交換することで核力を表現する。OBEP は場の理論に基づいて導出され、2 核子系の性質 (散乱および束縛) を精密に記述できるため、現実的核力と呼ばれており、それは中間子論のある種の到達点と言えるだろう。

OBEP では同じ中間子を複数回交換する効果は考慮されていないため、“one-boson” と名付けられている。通常、中間子論ではフレーバーを持たない (アップとダウンクォークから構成される) 軽い中間子の交換のみを考える。具体的には、図 1 に示すように、スピン J とパリティ P が $J^P = 0^-$ である擬スカラー中間子 π および η , $J^P = 0^+$ であるスカラー中間子 σ および δ , そして $J^P = 1^-$ のベクトル中間子 ρ および ω という 6 つの中間子を考えようⁱ。

文献 [1] では OBEP の導出が詳しく説明してあるが、以下ではその概要を簡単に説明するに留める。なお、今回の第四回講義では、 $\hbar = c = 1$ となる自然単位系で定式化する。したがって、数値計算では単位系に気をつける必要がある。詳細は付録 A にまとめた。

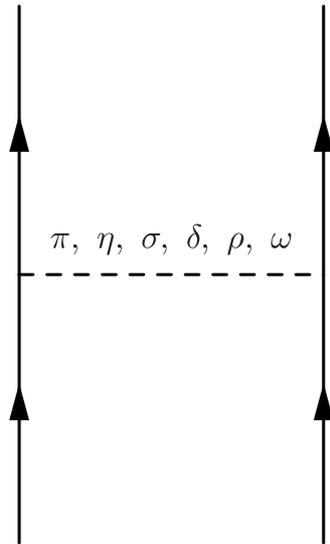


図 1 1 つのボソン交換ポテンシャルを表すファインマン図。実線の矢印が核子、破線が交換する 6 種類の中間子を表す。

ⁱ スカラー中間子について、現代では σ 中間子は f_0 中間子、 δ 中間子は a_0 中間子と呼ばれる。

1.2 ラグランジアンとファインマンルール

場の理論に基づいた中間子と核子の結合を表すラグランジアンは

$$\mathcal{L}_{\text{ps}} = -g_{\text{ps}} \bar{\psi} i \gamma^5 \psi \varphi^{(\text{ps})}, \quad (1)$$

$$\mathcal{L}_{\text{s}} = g_{\text{s}} \bar{\psi} \psi \varphi^{(\text{s})}, \quad (2)$$

$$\mathcal{L}_{\text{v}} = -g_{\text{v}} \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \varphi_\mu^{(\text{v})} - \frac{f_{\text{v}}}{4M} \bar{\psi} \sigma^{\mu\nu} \psi \left(\partial_\mu \varphi_\nu^{(\text{v})} - \partial_\nu \varphi_\mu^{(\text{v})} \right), \quad (3)$$

と書ける。ここで ψ は核子をあらわす Dirac スピノル場であり、 $\varphi^{(\text{ps})}$ 、 $\varphi^{(\text{s})}$ 、 $\varphi_\mu^{(\text{v})}$ はそれぞれ、擬スカラー中間子、スカラー中間子、ベクトル中間子の場を表す。また、 M は核子の質量、 γ^μ はガンマ行列、 γ_5 はガンマ行列を用いて表現されるカイラリティと呼ばれる行列、 $\sigma^{\mu\nu} = (i/2)[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$ である。アイソベクトル中間子 (アイソスピンの 1 の中間子) については、アイソスピン演算子 $\boldsymbol{\tau}$ を用いて $\varphi^{(\alpha)} \rightarrow \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\varphi}^{(\alpha)}$ と変更される。

詳しく説明しないが、これらのラグランジアンから”ファインマンルール”に則って中間子交換ポテンシャルが導出される。このように導出されたポテンシャルは、4元運動量で表現される相対論的な運動量空間でのポテンシャルである。

1.3 運動量空間でのボソン交換ポテンシャル

4元運動量の時間成分を無視するという静的近似により、非相対論的なポテンシャルが得られる。そのようなポテンシャルは運動量移行 \mathbf{q} と平均運動量 \mathbf{Q} の関数であり、それぞれ

$$\mathbf{q} = \mathbf{p}' - \mathbf{p}, \quad (4)$$

$$\mathbf{Q} = \frac{1}{2}(\mathbf{p}' + \mathbf{p}), \quad (5)$$

で定義される。具体的には、擬スカラー中間子 ($\alpha = \text{ps}$), スカラー中間子 ($\alpha = \text{s}$), そしてベクトル中間子 ($\alpha = \text{v}$) の交換に対する運動量空間での非相対論的なポテンシャル w_α は、

$$w_{\text{ps}}(\mathbf{q}) = -\frac{1}{(2\pi)^3} \frac{g_{\text{ps}}^2}{4M^2} \frac{(\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \mathbf{q})(\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \mathbf{q})}{q^2 + m_{\text{ps}}^2} \hat{V}_\tau, \quad (6)$$

$$w_{\text{s}}(\mathbf{q}, \mathbf{Q}) = -\frac{1}{(2\pi)^3} \frac{g_{\text{s}}^2}{q^2 + m_{\text{s}}^2} \left[1 - \frac{Q^2}{2M^2} + \frac{q^2}{8M^2} - \frac{i}{2M^2} \mathbf{S} \cdot (\mathbf{q} \times \mathbf{Q}) \right] \hat{V}_\tau, \quad (7)$$

$$\begin{aligned} w_{\text{v}}(\mathbf{q}, \mathbf{Q}) = & \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{1}{q^2 + m_{\text{v}}^2} \left[g_{\text{v}}^2 \left\{ 1 + \frac{3Q^2}{2M^2} - \frac{q^2}{8M^2} + \frac{3i}{2M^2} \mathbf{S} \cdot (\mathbf{q} \times \mathbf{Q}) \right. \right. \\ & \left. \left. - \boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2 \frac{q^2}{4M^2} + \frac{1}{4M^2} (\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \mathbf{q})(\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \mathbf{q}) \right\} \right. \\ & \left. + \frac{g_{\text{v}} f_{\text{v}}}{2M} \left\{ -\frac{q^2}{M} + \frac{4i}{M} \mathbf{S} \cdot (\mathbf{q} \times \mathbf{Q}) - \boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2 \frac{q^2}{M} + \frac{1}{M} (\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \mathbf{q})(\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \mathbf{q}) \right\} \right. \\ & \left. + \frac{f_{\text{v}}^2}{4M^2} \left\{ -\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2 q^2 + (\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \mathbf{q})(\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \mathbf{q}) \right\} \right], \quad (8) \end{aligned}$$

で与えられる。ただし、アイソスピン演算子は

$$\hat{V}_\tau = \begin{cases} \boldsymbol{\tau}_1 \cdot \boldsymbol{\tau}_2 & (\text{Isovector meson}), \\ 1 & (\text{Isoscalar meson}). \end{cases} \quad (9)$$

である。また、 m_α は中間子の質量、2核子の合成スピンは $\mathbf{S} = (\boldsymbol{\sigma}_1 + \boldsymbol{\sigma}_2)/2$ である。これらのポテンシャルは \mathbf{q} だけでなく、 \mathbf{Q} にも依存しているため、非局所ポテンシャルと呼ばれる。

なお、式 (6)–(8) における因子 $(2\pi)^{-3}$ は、

$$\langle \mathbf{p}' | \mathbf{p} \rangle = \delta(\mathbf{p}' - \mathbf{p}), \quad (10)$$

$$\langle \mathbf{r} | \mathbf{p} \rangle = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}, \quad (11)$$

という定義を採用していることに起因する。

1.4 座標空間でのボソン交換ポテンシャル

第 1.3 節のポテンシャルをフーリへ変換することで、座標空間におけるポテンシャルが得られる。この計算はレポート問題で扱うこととするが、例えば文献 [2] で詳しく説明されている。

このようにして得られた座標空間でのポテンシャルを以下にまとめる。なお、運動量空間でのポテンシャルの非局所性は、局所的な座標空間でのポテンシャルの速度依存項 (微分演算子を含む項) として現れる。

1.4.1 擬スカラー中間子交換

擬スカラー中間子交換ポテンシャルは中心力 (C) とテンソル力 (T) から構成される:

$$v_{\text{ps}}(\mathbf{r}) = v_{\text{ps}}^{(\text{C})}(\mathbf{r}) + v_{\text{ps}}^{(\text{T})}(\mathbf{r}), \quad (12)$$

$$v_{\text{ps}}^{(\text{C})}(\mathbf{r}) = \frac{1}{12} \frac{g_{\text{ps}}^2}{4\pi} \left(\frac{m_{\text{ps}}}{M} \right)^2 m_{\text{ps}} Y(m_{\text{ps}}r) \boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2 \hat{V}_\tau, \quad (13)$$

$$v_{\text{ps}}^{(\text{T})}(\mathbf{r}) = \frac{1}{12} \frac{g_{\text{ps}}^2}{4\pi} m_{\text{ps}} Z(m_{\text{ps}}r) \mathcal{S}_{12}(\hat{\mathbf{r}}) \hat{V}_\tau. \quad (14)$$

ここで、動径成分は以下で定義される:

$$Y(mr) = \frac{e^{-mr}}{mr}, \quad (15)$$

$$Z(mr) = \left(\frac{m}{M} \right)^2 \left[1 + \frac{3}{mr} + \frac{3}{(mr)^2} \right] Y(mr). \quad (16)$$

1.4.2 スカラー中間子交換

スカラー中間子交換ポテンシャルは中心力とスピン軌道力 (SO) から成る:

$$v_{\text{s}}(\mathbf{r}) = v_{\text{s}}^{(\text{C1})}(\mathbf{r}) + v_{\text{s}}^{(\text{C2})}(\mathbf{r}) + v_{\text{s}}^{(\text{SO})}(\mathbf{r}), \quad (17)$$

$$v_{\text{s}}^{(\text{C1})}(\mathbf{r}) = -\frac{g_{\text{s}}^2}{4\pi} \left[1 - \frac{1}{4} \left(\frac{m_{\text{s}}}{M} \right)^2 \right] m_{\text{s}} Y(m_{\text{s}}r) \quad (18)$$

$$v_{\text{s}}^{(\text{C2})}(\mathbf{r}) = -\frac{g_{\text{s}}^2}{4\pi} \frac{m_{\text{s}}}{4M^2} [\nabla^2 Y(m_{\text{s}}r) + Y(m_{\text{s}}r) \nabla^2] \hat{V}_\tau, \quad (19)$$

$$v_{\text{s}}^{(\text{SO})}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{2} \frac{g_{\text{s}}^2}{4\pi} m_{\text{s}} Z_1(m_{\text{s}}r) \mathbf{L} \cdot \mathbf{S} \hat{V}_\tau. \quad (20)$$

ただし、中心力は (C1) と (C2) という 2 つの項に分けている。また、動径成分は

$$\begin{aligned} Z_1(mr) &= -\left(\frac{m}{M} \right)^2 \frac{1}{mr} \frac{d}{d(mr)} Y(mr) \\ &= \left(\frac{m}{M} \right)^2 \left[\frac{1}{mr} + \frac{1}{(mr)^2} \right] Y(mr), \end{aligned} \quad (21)$$

で与えられる。ラプラシアンは

$$\nabla^2 = \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} r - \frac{\mathbf{L}^2}{r^2}, \quad (22)$$

と定義される。

1.4.3 ベクトル中間子交換

ベクトル中間子交換には中心力、スピン軌道力、テンソル力のすべてが現れるが、中心力は3つの項 (C1, C2, C3) に分けておくと便利である:

$$v_v(\mathbf{r}) = v_v^{(C1)}(\mathbf{r}) + v_v^{(C2)}(\mathbf{r}) + v_v^{(C3)}(\mathbf{r}) + v_v^{(SO)}(\mathbf{r}) + v_v^{(T)}(\mathbf{r}), \quad (23)$$

$$v_v^{(C1)}(\mathbf{r}) = \frac{g_v^2}{4\pi} \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{m_v}{M} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{f_v}{g_v} \left(\frac{m_v}{M} \right)^2 \right] m_v Y(m_v r) \hat{V}_\tau, \quad (24)$$

$$v_v^{(C2)}(\mathbf{r}) = \frac{1}{6} \frac{g_v^2}{4\pi} \left[1 + 2 \frac{f_v}{g_v} + \left(\frac{f_v}{g_v} \right)^2 \right] \left(\frac{m_v}{M} \right)^2 m_v Y(m_v r) \boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2 \hat{V}_\tau, \quad (25)$$

$$v_v^{(C3)}(\mathbf{r}) = -\frac{g_v^2}{4\pi} \frac{3m_v}{4M^2} \left[\nabla^2 Y(m_v r) + Y(m_v r) \nabla^2 \right] \hat{V}_\tau, \quad (26)$$

$$v_v^{(SO)}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{2} \frac{g_v^2}{4\pi} \left(3 + 4 \frac{f_v}{g_v} \right) m_v Z_1(m_v r) \mathbf{L} \cdot \mathbf{S} \hat{V}_\tau, \quad (27)$$

$$v_v^{(T)}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{12} \frac{g_v^2}{4\pi} \left[1 + 2 \frac{f_v}{g_v} + \left(\frac{f_v}{g_v} \right)^2 \right] m_v Z(m_v r) S_{12}(\hat{\mathbf{r}}) \hat{V}_\tau. \quad (28)$$

1.5 形状因子の導入

核子は点粒子ではなく有限の大きさを持っている。この効果を実効的に取り入れるために、形状因子を導入しよう。すなわち、運動量のカットオフ Λ_α ($\alpha = p, s, v$) を導入し、 Λ_α を超える運動量状態にある2核子の散乱状態をあらわには扱わないこととする。これは、 Λ_α^{-1} 程度の座標空間でのカットオフと等価であり、 Λ_α^{-1} よりも短距離にある2核子の状態を取り入れないことを意味する。なお、形状因子を導入することは、場の理論で正則化と呼ばれる手続きと本質的には等価である。正則化には高運動量の寄与を避け、ポテンシャルの発散を除去する目的があるが、実際、形状因子を導入することでこの目的が達成されることをこれから見よう。

運動量空間でのポテンシャルに Λ_α を含む任意の形状因子あるいは正則化関数をかけ、ポテンシャルの高運動量成分を抑制しよう。ここでは Bonn グループが採用している双極子型の形状因子 [1, 3],

$$F_\alpha(q) = \frac{\Lambda_\alpha^2 - m_\alpha^2}{\Lambda_\alpha^2 + q^2}, \quad (29)$$

を採用しよう。なお、この形状因子は $\Lambda_\alpha \rightarrow \infty$ で $F_\alpha(q) \rightarrow 1$ を満たす。図2に形状因子を q の関数として表す。ここでは例として、 π 中間子交換および ρ 中間子交換に対して、 Λ_α の値を変えたときの F_α を示している。この図からわかるとおり、形状因子を運動量空間のポテンシャルにかけることによって、ポテンシャルの q が大きな成分を抑制することができる。

上記の形状因子 F_α をファインマン図1の各頂点について作用させる。すなわち、運動量空間での

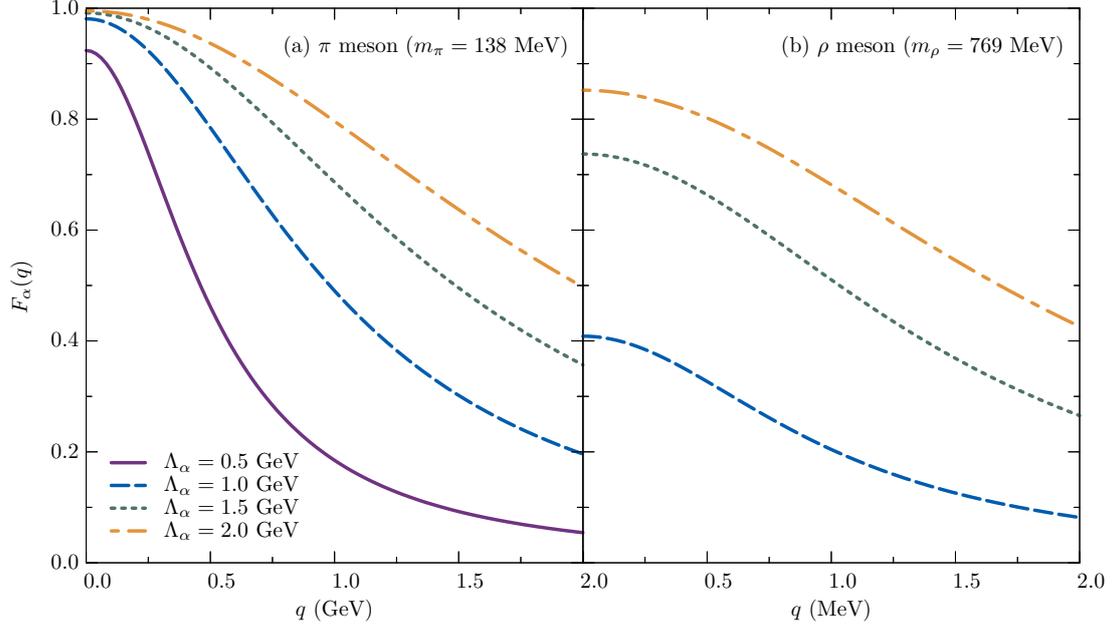


図2 運動量移行 q の関数として表した双極子型の形状因子 F_α の振る舞い。ここでは (a) π 中間子交換および (b) ρ 中間子交換に対する F_α を示しており、2つの中間子の質量はそれぞれ m_π と m_ρ である。実線、破線、点線、一点鎖線はそれぞれ、カットオフ運動量 Λ_α が 0.5, 1.0, 1.5, 2.0 GeV に対応している。

ポテンシャルは

$$w_\alpha(\mathbf{q}) \rightarrow w_\alpha^{(\text{reg})}(\mathbf{q}) = w_\alpha(\mathbf{q})F_\alpha^2(q), \quad (30)$$

のように正則化される。

さて、式 (30) により、中間子の伝播関数と F_α^2 の積が現れるが、これは以下のように変形しておく
と便利である:

$$\begin{aligned} \frac{1}{q^2 + m_\alpha^2} \left(\frac{\Lambda_\alpha^2 - m_\alpha^2}{\Lambda_\alpha^2 + q^2} \right)^2 &= \left(\frac{1}{q^2 + m_\alpha^2} - \frac{1}{\Lambda_\alpha^2 + q^2} \right) \frac{\Lambda_\alpha^2 - m_\alpha^2}{\Lambda_\alpha^2 + q^2} \\ &= \frac{1}{q^2 + m_\alpha^2} - \frac{1}{\Lambda_\alpha^2 + q^2} - \frac{\Lambda_\alpha^2 - m_\alpha^2}{(\Lambda_\alpha^2 + q^2)^2} \\ &= \frac{1}{q^2 + m_\alpha^2} - \frac{1}{\Lambda_\alpha^2 + q^2} + (\Lambda_\alpha^2 - m_\alpha^2) \frac{d}{d\Lambda_\alpha^2} \frac{1}{\Lambda_\alpha^2 + q^2}. \end{aligned} \quad (31)$$

この式から明らかなように、運動量空間でのポテンシャル $w_\alpha^{(\text{reg})}$ をフーリエ変換するとき、その動径成分は必ず $(q^2 + m)^{-1}$ という形で \mathbf{q} 依存性を持つことがわかる。ただし $m = \{m_\alpha, \Lambda_\alpha\}$ である。したがって、 $w_\alpha^{(\text{reg})}$ のフーリエ変換にも、形状因子をかける前と同じ計算が適用可能である。言い換えると、正則化された座標空間でのポテンシャル $v_\alpha^{(\text{reg})}$ を求めるには、形状因子を導入する前の座標空

間でのポテンシャル v_α の動径成分を、 Λ_α を含む以下の形に置き換えればよい:

$$m_\alpha Y(m_\alpha r) \rightarrow m_\alpha Y(m_\alpha r) - \Lambda_\alpha Y(\Lambda_\alpha r) - \frac{1}{2} (\Lambda_\alpha^2 - m_\alpha^2) r Y(\Lambda_\alpha r), \quad (32)$$

$$m_\alpha Z(m_\alpha r) \rightarrow m_\alpha Z(m_\alpha r) - \Lambda_\alpha Z(\Lambda_\alpha r) - \frac{1}{2} (\Lambda_\alpha^2 - m_\alpha^2) \frac{\Lambda_\alpha + \Lambda_\alpha^2 r}{M^2} Y(\Lambda_\alpha r), \quad (33)$$

$$m_\alpha Z_1(m_\alpha r) \rightarrow m_\alpha Z_1(m_\alpha r) - \Lambda_\alpha Z_1(\Lambda_\alpha r) - \frac{1}{2} (\Lambda_\alpha^2 - m_\alpha^2) \frac{\Lambda_\alpha}{M^2} Y(\Lambda_\alpha r). \quad (34)$$

なお、 $\Lambda_\alpha \rightarrow \infty$ のとき、式 (32)–(34) の右辺にある Λ_α を含む項は落ちるため、確かに形状因子を導入する前の中間子交換ポテンシャルが得られる。

2 ボソン交換ポテンシャルと重陽子

2.1 一般化固有値問題

これまでと同様、重陽子を計算の対象としよう。今回は OBEP を用いて計算する。重陽子の波動関数 $|\Phi_{\text{deuteron}}\rangle$ は

$$|\Phi_{\text{deuteron}}\rangle \equiv |\Phi_{1m_j 00}^1\rangle = \left| R_0 \left[Y_0 \otimes \xi_1^{(\sigma)} \right]_{1m_j} \xi_{00}^{(\tau)} \right\rangle + \left| R_2 \left[Y_2 \otimes \xi_1^{(\sigma)} \right]_{1m_j} \xi_{00}^{(\tau)} \right\rangle, \quad (35)$$

と書ける。ここで l は陽子と中性子の相対軌道角運動量であり、 $R_l (Y_{lm})$ は相対運動の動径成分の波動関数 (角度成分の波動関数である球面調和関数) である。また、2 核子の合成スピン (アイソスピン) 波動関数を $\xi_{SM_S}^{(\sigma)}$ ($\xi_{TM_T}^{(\tau)}$) と表した。ここで、 S (T) は 2 核子系のスピン (アイソスピン) であり、その第三成分を M_S (M_T) とした。

チャンネル結合方程式もこれまでと同様の手順で導出できる。すなわち、相対運動の Schrödinger 方程式

$$\left[\hat{H} - E \right] |\Phi_{\text{deuteron}}\rangle = 0, \quad (36)$$

$$\hat{H} = \hat{T}_{\text{rel}} + \hat{V}, \quad (37)$$

において、相互作用 \hat{V} に対応するポテンシャルに OBEP を用いる。これまでと同様、波動関数を以下のように基底で展開する:

$$R_l(r) = \frac{u_l(r)}{r} = \sum_{i=1}^n c_i^{(l)} \varphi_i^{(l)}(r), \quad (38)$$

$$\varphi_i^{(l)}(r) = \frac{\phi_i^{(l)}(r)}{r}. \quad (39)$$

Rayleigh–Ritz の変分法により、 S 波と D 波の結合を取り入れたチャンネル結合方程式 (連立方程式)

は、

$$\sum_j \left[\mathcal{T}_{ij}^{(00)} + \mathcal{V}_{ij}^{(00)} - E \mathcal{N}_{ij}^{(00)} \right] c_j^{(0)} + \sum_j \mathcal{V}_{ij}^{(02)} c_j^{(2)} = 0, \quad (40)$$

$$\sum_j \mathcal{V}_{ij}^{(20)} c_j^{(0)} + \sum_j \left[\mathcal{T}_{ij}^{(22)} + \mathcal{V}_{ij}^{(22)} - E \mathcal{N}_{ij}^{(22)} \right] c_j^{(2)} = 0, \quad (41)$$

と書ける。ただし、各行列要素は以下で定義される:

$$\mathcal{N}_{ij}^{(l'l')} = \left\langle \varphi_i^{(l)} \left[Y_l \otimes \xi_1^{(\sigma)} \right]_{1m_j} \xi_{00}^{(\tau)} \left| \varphi_j^{(l')} \left[Y_{l'} \otimes \xi_1^{(\sigma)} \right]_{1m_j} \xi_{00}^{(\tau)} \right\rangle, \quad (42)$$

$$\mathcal{T}_{ij}^{(l'l')} = \left\langle \varphi_i^{(l)} \left[Y_l \otimes \xi_1^{(\sigma)} \right]_{1m_j} \xi_{00}^{(\tau)} \left| \hat{T}_{\text{rel}} \left| \varphi_j^{(l')} \left[Y_{l'} \otimes \xi_1^{(\sigma)} \right]_{1m_j} \xi_{00}^{(\tau)} \right\rangle, \quad (43)$$

$$\mathcal{V}_{ij}^{(l'l')} = \left\langle \varphi_i^{(l)} \left[Y_l \otimes \xi_1^{(\sigma)} \right]_{1m_j} \xi_{00}^{(\tau)} \left| \hat{V} \left| \varphi_j^{(l')} \left[Y_{l'} \otimes \xi_1^{(\sigma)} \right]_{1m_j} \xi_{00}^{(\tau)} \right\rangle. \quad (44)$$

これらの具体形は、基底関数を定めると計算可能となる。なお、基底関数にガウス関数を採用した場合、ノルムの行列要素 $\mathcal{N}_{ij}^{(l'l')}$ および運動エネルギーの行列要素 $\mathcal{T}_{ij}^{(l'l')}$ は既に第三回講義で求めている。OBEP に対する 2 体行列要素は付録 B にまとめた。

さて、ハミルトニアン of 行列要素を

$$\mathcal{H}_{ij}^{(l'l')} = \mathcal{T}_{ij}^{(l'l')} + \mathcal{V}_{ij}^{(l'l')}, \quad (45)$$

で定義すれば、式 (40) と式 (41) は行列を用いて以下の形で表現できる:

$$\left[\left(\begin{array}{c} \mathcal{H}_{ij} \end{array} \right) - E \left(\begin{array}{c} \mathcal{N}_{ij} \end{array} \right) \right] \left(\begin{array}{c} c_j \end{array} \right) = 0, \quad (46)$$

$$\mathcal{H}_{ij} = \begin{pmatrix} \mathcal{H}_{ij}^{(00)} & \mathcal{H}_{ij}^{(02)} \\ \mathcal{H}_{ij}^{(20)} & \mathcal{H}_{ij}^{(22)} \end{pmatrix}, \quad (47)$$

$$\mathcal{N}_{ij} = \begin{pmatrix} \mathcal{N}_{ij}^{(00)} & 0 \\ 0 & \mathcal{N}_{ij}^{(22)} \end{pmatrix}, \quad (48)$$

$$c_j = \begin{pmatrix} c_j^{(0)} \\ c_j^{(2)} \end{pmatrix}. \quad (49)$$

この一般化固有値問題を解くことで、固有値 E および固有ベクトル $c_j^{(l)}$ を得ることができる。

式 (47) は、第三回講義の表式から微修正を受ける。すなわち、これまでは中心力 \hat{V}_C とテンソル力 \hat{V}_T のみを考慮していたが、OBEP ではスピン軌道力 \hat{V}_{SO} も含むため、 $\hat{V} = \hat{V}_C + \hat{V}_{\text{SO}} + \hat{V}_T$ と書くことができる。その結果、 \mathcal{H}_{ij} は

$$\mathcal{H}_{ij} = \begin{pmatrix} \mathcal{T}_{ij}^{(00)} + \mathcal{V}_{C;ij}^{(00)} & \mathcal{V}_{T;ij}^{(02)} \\ \mathcal{V}_{T;ij}^{(20)} & \mathcal{T}_{ij}^{(22)} + \mathcal{V}_{C;ij}^{(22)} + \mathcal{V}_{\text{SO};ij}^{(22)} + \mathcal{V}_{T;ij}^{(22)} \end{pmatrix}, \quad (50)$$

となる。ただし、 $\mathcal{V}_{X;ij}^{(U)}$ ($X = C, SO, T$) は式 (44) の \hat{V} を \hat{V}_X で置き換えたときの 2 体行列要素である。式 (50) の D 波対角成分 (右辺の行列の右下成分) にスピン軌道力が寄与していることがわかる。

Exercise 2.1 —OBEP で重陽子を解こう—

重陽子を S 波と D 波の混合を考慮して解こう。前回との違いはポテンシャルを Gaussian three-range soft core (G3RS) ポテンシャル [4] ではなく、第 1 節で求めた OBEP を用いることである。

1. まずはコードの構造を理解しよう。前回までのシンプルなコードと異なり、OBEP を扱うためにコードの構造が大規模な変更を受けている。
2. 次に π 中間子交換だけで重陽子を計算してみよう。これには山口らの計算 [5,6] を参考にするとよい。付録 C にまとめた山口らのパラメータを出発点として、カットオフ運動量 Λ_α を微調整しよう。微調整が必要な理由は付録 C で述べる。
3. 続いて、 π, ρ, ω の交換を考慮して重陽子を計算してみよう。さらに、その計算に σ 中間子交換を追加し、2 体行列要素や波動関数がどのような変化を受けるか確認しよう。これには、やはり山口らのパラメータをの cutoff 運動量を微調整するとよい。
4. 最後にポテンシャルをより包括的なものに変更しよう。すなわち、 $\pi, \eta, \sigma, \delta, \rho, \omega$ の中間子交換を考慮した Bonn グループの OBEP を出発点としよう。これは非相対論的な座標空間での OBEP のパラメータセット A (Bonn-OBEP-A と呼ぶことにする) [1] のことである (そのパラメータは付録 C にまとめた)。ただし、第 2.2 節で述べるように、Bonn-OBEP-A のパラメータをそのまま使用しても、現在の定式化に基づいた方法では現実的な重陽子の性質が得られない。そこで、Bonn-OBEP-A のパラメータを修正したもの (付録 C 参照) を使用しよう。そして、6 つの中間子を考慮した結果がそれまでの結果とどう異なるのかを考察しよう。

2.2 Bonn-OBEP-A に対するコメント

前述のとおり、Bonn-OBEP-A のパラメータ [1] をそのまま使用しても、実験事実と整合する重陽子の性質が得られない。残念ながらその理由は断言できないが、考えられる一つの可能性は形状因子の取り扱い方の違いである。

用いている形状因子は同じ関数形であるが、その扱い方が第 1 節で示した今回の方法と異なる。すなわち、文献 [1,3] で示されているように、Bonn グループの計算では式 (31) を用いるのではなく、

$$\frac{1}{q^2 + m_\alpha^2} \left(\frac{\Lambda_\alpha^2 - m_\alpha^2}{\Lambda_\alpha^2 + q^2} \right)^2 \approx \frac{1}{q^2 + m_\alpha^2} - \frac{\Lambda_{\alpha-}^2 - m_\alpha^2}{\Lambda_{\alpha-}^2 - \Lambda_{\alpha+}^2} \frac{1}{q^2 + \Lambda_{\alpha+}^2} + \frac{\Lambda_{\alpha+}^2 - m_\alpha^2}{\Lambda_{\alpha-}^2 - \Lambda_{\alpha+}^2} \frac{1}{q^2 + \Lambda_{\alpha-}^2}, \quad (51)$$

を代わりに採用している。ただし、 $\Lambda_{\alpha\pm} = \Lambda_{\alpha} \pm \epsilon$ であり、GeV オーダーの Λ_{α} に対して適切な値は $\epsilon = 10$ MeV であると述べられている [1, 3]。式 (51) は、右辺をから左辺を求めることで確認できるが、途中で $\epsilon \rightarrow 0$ の操作が必要であるという点で近似式である。式 (51) に基づくと、フーリへ変換により、正則化された座標空間でのポテンシャルが以下のように求まる:

$$v_{\alpha}^{(\text{reg})}(\mathbf{r}) = v_{\alpha}(m_{\alpha}, \mathbf{r}) - \frac{\Lambda_{\alpha-}^2 - m_{\alpha}^2}{\Lambda_{\alpha-}^2 - \Lambda_{\alpha+}^2} v_{\alpha}(\Lambda_{\alpha+}, \mathbf{r}) + \frac{\Lambda_{\alpha+}^2 - m_{\alpha}^2}{\Lambda_{\alpha-}^2 - \Lambda_{\alpha+}^2} v_{\alpha}(\Lambda_{\alpha-}, \mathbf{r}). \quad (52)$$

ただし、ポテンシャルの引数に m_{α} あるいは $\Lambda_{\alpha\pm}$ を明示的に書いた。

付録 C で示すように、Bonn-OBEP-A のパラメータは $\epsilon/\Lambda_{\alpha} \ll 1$ であるため、確かに式 (51) は精度よく成り立つと期待され、その結果、式 (31) と (51) はどちらも等価なポテンシャルを与えるはずである。しかし、計算結果はどうやらそうはなっていないということを示唆している。この点については引き続き分析する必要がある。

ちょっと踏み込んだ話 2.1 — 中間子論に基づく様々な核力模型 —

中間子論に基づく核力は様々な模型によって提案されている。ここでは代表的なものをいくつか列挙しておく。

- Paris グループの核力
 - Paris potential [7]:
非相対論的で座標空間で定義された局所ポテンシャル。長距離を π 中間子の交換、中間距離を 2 つの π 中間子交換、そして短距離を ω 中間子の交換で記述している。
- Bonn グループの核力
 - Bonn full model (Bonn-A, Bonn-B, Bonn-C) [3]:
相対論的で運動量空間で定義された非局所ポテンシャル。6 つの中間子 ($\pi, \eta, \sigma, \delta, \rho, \omega$) の交換に加え、核子の励起状態である Δ 粒子の自由度や 2 つの π 中間子の交換、さらには π と ρ の同時交換の効果などを取り入れた、最も発展的な中間子論に基づくポテンシャルである。これらの効果は総和としてあまり大きくなく、Bonn full model は後述する単純化した模型の正当性の根拠となっている。
 - Coordinate-space Bonn potential (Bonn-OBEP-A, Bonn-OBEP-B) [1]:
非相対論的で座標空間で定義された局所ポテンシャル。6 つの中間子 ($\pi, \eta, \sigma, \delta, \rho, \omega$) の交換のみを考慮している。
 - High-precision, charge-dependent Bonn potential (CD-Bonn) [8]:
非相対論的で運動量空間で定義された非局所ポテンシャル。6 つの中間子 ($\pi, \eta, \sigma, \delta, \rho, \omega$) の交換に基づき、荷電依存性も導入している。核子-核子の散乱位相差を高精度 ($\chi^2/\text{datum} \sim 1$) で再現する。

- Nijmegen グループの核力

- High-precision Nijmegen potential [9]:

非相対論的な局所ポテンシャル (Nijm I) と非相対論的な局所ポテンシャル (Nijm II) が提案されている。また、座標空間で定義されたポテンシャルと運動量空間で定義されたものの両方が用意されている (両者は等価である)。9つの中間子 ($\pi, \eta, \eta', \sigma, \delta, \epsilon, \rho, \omega, \phi$) の交換に基づき、荷電依存性も考慮されている。核子-核子の散乱位相差を高精度 ($\chi^2/\text{datum} \sim 1$) で再現する。

付録 A 自然単位系と数値計算上の注意

今回の第四回講義では、すべての定式化を自然単位系で行った。すなわち、 $\hbar = c = 1$ を採用している。一方で、式 (36) のエネルギー固有値 E はエネルギーの次元で求めるのが自然であろう。

まず、エネルギー固有値 E がエネルギーの次元を持つことから、ポテンシャル v_α および 2 体行列要素 $\mathcal{V}_{ij}^{(ll')}$ もエネルギーの次元を持つ。さらに、指数関数の引数が無次元であることを考慮すると、2 体行列要素の数値計算において、以下の処方をとればよいことがわかる:

- 質量およびカットオフエネルギー

$$m_\alpha \rightarrow \frac{m_\alpha}{\hbar c}, \quad M \rightarrow \frac{M}{\hbar c}, \quad \Lambda_\alpha \rightarrow \frac{\Lambda_\alpha}{\hbar c}. \quad (\text{A.1})$$

- 2 体行列要素

$$\mathcal{V}_{ij}^{(ll')} \rightarrow \hbar c \mathcal{V}_{ij}^{(ll')}. \quad (\text{A.2})$$

式 (A.2) は、ポテンシャルに対して $v_\alpha \rightarrow \hbar c v_\alpha$ と置き換えることと等価である。

付録 B ボソン交換ポテンシャルとガウス関数展開法

第三回講義でまとめたガウス関数展開法 (Gaussian expansion method; GEM) [10] について、基底と重なり積分、ノルムの行列要素、運動エネルギーの行列要素はそのまま同じ表式が使えるため、OBPE を用いることで変更を受けるのは 2 体行列要素のみである。

2 体行列要素は、相互作用 \hat{V} に対応するポテンシャル v が相対座標に関して \mathbf{r} のみの関数として書ける局所ポテンシャルだと仮定すると、式 (44) より、

$$\mathcal{V}_{ij}^{(ll')} = \int d\mathbf{r} \left\langle \varphi_i^{(l)} \left[Y_l \otimes \xi_1^{(\sigma)} \right]_{1m_j} \xi_{00}^{(\tau)} \left| \mathbf{r} \right\rangle v(\mathbf{r}) \left\langle \mathbf{r} \left| \varphi_j^{(l')} \left[Y_{l'} \otimes \xi_1^{(\sigma)} \right]_{1m_j} \xi_{00}^{(\tau)} \right\rangle, \quad (\text{B.1})$$

となる。ここでは、重陽子を想定しており、スピン三重項、アイソスピン一重項のみを考慮する。式 (B.1) が含むポテンシャル v に第 1 節で導出した OBEP $v_\alpha^{(\text{reg})}$ を代入する。具体的な行列要素の表式を中間子の種類ごとに導出しよう。

B.1 擬スカラー中間子交換に対する 2 体行列要素

B.1.1 行列要素の概形

第 1.5 節で導入した、正則化された擬スカラー中間子交換のポテンシャル $v_{\text{ps}}^{(\text{reg})}$ を式 (B.1) の v に代入すると、以下の行列要素を得る：

$$\mathcal{V}_{\text{ps};ij}^{(l'l')} = \frac{g_{\text{ps}}^2}{4\pi} \langle \xi_{00}^{(\tau)} | \hat{V}_\tau | \xi_{00}^{(\tau)} \rangle N_i^{(l)} N_j^{(l')} \left[\mathcal{W}_{\text{psC};ij}^{(l'l')} + \mathcal{W}_{\text{psT};ij}^{(l'l')} \right]. \quad (\text{B.2})$$

ただし、

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_{\text{psC};ij}^{(l'l')} &= \frac{1}{12} \left(\frac{m_{\text{ps}}}{M} \right)^2 \int dr r^{l+l'+2} e^{-(\nu_i+\nu_j)r^2} \\ &\times \left[m_{\text{ps}} Y(m_{\text{ps}} r) - \Lambda_{\text{ps}} Y(\Lambda_{\text{ps}} r) - \frac{1}{2} (\Lambda_{\text{ps}}^2 - m_{\text{ps}}^2) r Y(\Lambda_{\text{ps}} r) \right] \\ &\times \int d\hat{r} \left[Y_l(\hat{r}) \otimes \langle \xi_1^{(\sigma)} | \right]_{1m_j}^* \boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2 \left[Y_{l'}(\hat{r}) \otimes | \xi_1^{(\sigma)} \rangle \right]_{1m_j}, \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_{\text{psT};ij}^{(l'l')} &= \frac{1}{12} \int dr r^{l+l'+2} e^{-(\nu_i+\nu_j)r^2} \\ &\times \left[m_{\text{ps}} Z(m_{\text{ps}} r) - \Lambda_{\text{ps}} Z(\Lambda_{\text{ps}} r) - \frac{1}{2} (\Lambda_{\text{ps}}^2 - m_{\text{ps}}^2) \frac{\Lambda_{\text{ps}} + \Lambda_{\text{ps}}^2 r}{M^2} Y(\Lambda_{\text{ps}} r) \right] \\ &\times \int d\hat{r} \left[Y_l(\hat{r}) \otimes \langle \xi_1^{(\sigma)} | \right]_{1m_j}^* \mathcal{S}_{12}(\hat{r}) \left[Y_{l'}(\hat{r}) \otimes | \xi_1^{(\sigma)} \rangle \right]_{1m_j}, \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

である。GEM におけるレンジパラメータ ν_i や規格化因子 $N_i^{(l)}$ の定義については第三回講義資料を参照してほしい。

まず、アイソスピン部分の行列要素は簡単に計算できて、式 (9) より、

$$\langle \xi_{00}^{(\tau)} | \hat{V}_\tau | \xi_{00}^{(\tau)} \rangle = \begin{cases} -3 & (\text{Isovector meson}), \\ 1 & (\text{Isoscalar meson}), \end{cases} \quad (\text{B.5})$$

である。これは、擬スカラー中間子に限らず、他の中間子のポテンシャルに対しても成り立つ。なお、式 (B.5) は、アイソスカラー中間子に対しては $\langle \xi_{00}^{(\tau)} | \xi_{00}^{(\tau)} \rangle = 1$ を用いたのみであるが、アイソベクトル中間子に対しては、以下のようにして導出できる。一般の 2 核子系アイソスピン状態 $\xi_{TM_T}^{(\tau)}$ に対

する演算子 $\tau_1 \cdot \tau_2$ の行列要素は、Wigner–Eckart の定理を用いて

$$\begin{aligned}
\langle \xi_{TM_T}^{(\tau)} | \tau_1 \cdot \tau_2 | \xi_{T'M_T'}^{(\tau)} \rangle &= -\sqrt{3} \langle \xi_{TM_T}^{(\tau)} | [\tau_1(1) \otimes \tau_1(2)]_{00} | \xi_{T'M_T'}^{(\tau)} \rangle \\
&= -\sqrt{3} \frac{1}{T} (T' M_T' 00 | TM) \langle \xi_{TM_T}^{(\tau)} || [\tau_1(1) \otimes \tau_1(2)]_{00} || \xi_{T'M_T'}^{(\tau)} \rangle \\
&= -\sqrt{3} \hat{T} \delta_{TT'} \delta_{M_T M_T'} \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & T \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & T \\ 1 & 1 & 0 \end{Bmatrix} \langle \frac{1}{2} || \tau || \frac{1}{2} \rangle \langle \frac{1}{2} || \tau || \frac{1}{2} \rangle \\
&= \delta_{TT'} \delta_{M_T M_T'} (-)^{T+1} \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & T \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{Bmatrix} 4 \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + 1 \right) \left(2 \frac{1}{2} + 1 \right) \right] \\
&= 6 (-)^{T+1} \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & T \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{Bmatrix} \delta_{TT'} \delta_{M_T M_T'}, \tag{B.6}
\end{aligned}$$

と計算できる。ここで $\hat{T} = \sqrt{2T+1}$ であり、 $\begin{Bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{Bmatrix}$ および $\begin{Bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{Bmatrix}$ はそれぞれ Wigner の 6-j 記号および 9-j 記号である。式 (B.6) に重陽子の量子数である $T=0$ を代入すると、アイソベクトル中間子に対して式 (B.5) を得る。

B.1.2 角度積分

中心力部分である式 (B.3) の角度積分は以下のように計算できる:

$$\begin{aligned}
&\int d\hat{r} \left[Y_l(\hat{r}) \otimes \langle \xi_1^{(\sigma)} | \right]_{1m_j}^* \sigma_1 \cdot \sigma_2 \left[Y_{l'}(\hat{r}) \otimes | \xi_1^{(\sigma)} \rangle \right]_{1m_j} \\
&= \sum_{\substack{mm' \\ M_S M_S'}} (lm1M_S | 1m_j) (l'm'1M_S' | 1m_j) \langle \xi_{1M_S}^{(\sigma)} | \sigma_1 \cdot \sigma_2 | \xi_{1M_S'}^{(\sigma)} \rangle \int d\hat{r} Y_{lm}(\hat{r})^* Y_{l'm'}(\hat{r}) \\
&= \delta_{ll'}, \tag{B.7}
\end{aligned}$$

ここで、球面調和関数の直交性を用いた。また、スピン演算子 $\sigma_1 \cdot \sigma_2$ の行列要素は、スピンとアイソスピンはともに SU(2) 代数に従うため、式 (B.6) と同様に計算できる。すなわち、 $\tau_1 \cdot \tau_2$ を $\sigma_1 \cdot \sigma_2$ に、 T を $S=1$ にそれぞれ読み替えると、 $\langle \xi_{1M_S}^{(\sigma)} | \sigma_1 \cdot \sigma_2 | \xi_{1M_S'}^{(\sigma)} \rangle = \delta_{M_S M_S'}$ を得ることができる。

さらに、テンソル力部分である式 (B.4) の角度積分を計算しよう。これは第三回講義で既に導出している:

$$f_T^{(ll')} \equiv \int d\hat{r} \left[Y_l(\hat{r}) \otimes \langle \xi_1^{(\sigma)} | \right]_{1m_j}^* \mathcal{S}_{12}(\hat{r}) \left[Y_{l'}(\hat{r}) \otimes | \xi_1^{(\sigma)} \rangle \right]_{1m_j} = 2\sqrt{6} \hat{l} \hat{l}' (l0l'0|20) \begin{Bmatrix} l & l' & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{Bmatrix}. \tag{B.8}$$

B.1.3 最終形

上記の計算より、行列要素は簡単にまとめることができる。まず、式 (B.3) および式 (B.4) の動径積分に注目しよう。積分が含む軌道角運動量 l および l' に依存する r の冪は、中心力に対しては

$l = 0, 2$, テンソル力に対しては $l + l' = 2, 4$ が許される。したがって、積分を

$$G_{ij}^{(n)}(m) \equiv \int dr r^n e^{-(\nu_i + \nu_j)r^2 - mr}, \quad (\text{B.9})$$

と定義しておくことと便利である。すると、式 (B.3) および式 (B.4) はそれぞれ以下のように書くことができる。

$$\mathcal{W}_{\text{psC};ij}^{(ll')}(m) = \frac{1}{12} \delta_{ll'} \left(\frac{m_{\text{ps}}}{M} \right)^2 \left[G_{ij}^{(2l+1)}(m_{\text{ps}}) - G_{ij}^{(2l+1)}(\Lambda_{\text{ps}}) - \frac{1}{2\Lambda_{\text{ps}}} (\Lambda_{\text{ps}}^2 - m_{\text{ps}}^2) G_{ij}^{(2l+2)}(\Lambda_{\text{ps}}) \right], \quad (\text{B.10})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_{\text{psT};ij}^{(ll')} &= \frac{1}{12} f_{\text{T}}^{(ll')} \frac{1}{M^2} \left[3 \left\{ G_{ij}^{(l+l'-1)}(m_{\text{ps}}) - G_{ij}^{(l+l'-1)}(\Lambda_{\text{ps}}) \right\} \right. \\ &\quad + 3 \left\{ m_{\text{ps}} G_{ij}^{(l+l')}(m_{\text{ps}}) - \Lambda_{\text{ps}} G_{ij}^{(l+l')}(\Lambda_{\text{ps}}) \right\} \\ &\quad + m_{\text{ps}}^2 G_{ij}^{(l+l'+1)}(m_{\text{ps}}) - \frac{1}{2} (3\Lambda_{\text{ps}}^2 - m_{\text{ps}}^2) G_{ij}^{(l+l'+1)}(\Lambda_{\text{ps}}) \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} (\Lambda_{\text{ps}}^2 - m_{\text{ps}}^2) \Lambda_{\text{ps}} G_{ij}^{(l+l'+2)}(\Lambda_{\text{ps}}) \right]. \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

これが擬スカラー中間子交換に対する 2 体行列要素の最終形である。なお、 $f_{\text{T}}^{(ll')}$ は式 (B.8) で定義しているが、 $l + l'$ の具体的な値を与えると、以下のように簡単に書くことができる：

$$f_{\text{T}}^{(ll')} = 2\sqrt{6} \tilde{l}l' (l0l'0|20) \begin{Bmatrix} l & l' & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{Bmatrix} = \begin{cases} 0 & (l + l' = 0), \\ 2\sqrt{2} & (l + l' = 2), \\ -2 & (l + l' = 4), \end{cases} \quad (\text{B.12})$$

また、 $G_{ij}^{(n)}$ の計算については付録 D で詳細に説明する。

B.2 スカラー中間子交換に対する 2 体行列要素

B.2.1 行列要素の概形

第 1.5 節で説明したスカラー粒子交換のポテンシャル $v_s^{\text{(reg)}}$ を式 (B.1) の v に代入すると、行列要素は

$$\mathcal{V}_{s;ij}^{(ll')} = \frac{g_s^2}{4\pi} \left\langle \xi_{00}^{(\tau)} \left| \hat{V}_\tau \right| \xi_{00}^{(\tau)} \right\rangle N_i^{(l)} N_j^{(l')} \left[\mathcal{W}_{\text{sC};ij}^{(ll')} + \mathcal{W}_{\text{sSO};ij}^{(ll')} \right], \quad (\text{B.13})$$

となる。ここで、中心力の行列要素 $\mathcal{W}_{\text{sC};ij}^{(l')}$ は以下のように 2 つの項に分けて定義しておく と便利である:

$$\mathcal{W}_{\text{sC};ij}^{(l')} = \mathcal{W}_{\text{sC1};ij}^{(l')} + \mathcal{W}_{\text{sC2};ij}^{(l')}, \quad (\text{B.14})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_{\text{sC1};ij}^{(l')} &= - \left[1 - \frac{1}{4} \left(\frac{m_s}{M} \right)^2 \right] \int dr r^{l+l'+2} e^{-(\nu_i+\nu_j)r^2} \\ &\quad \times \left[m_s Y(m_s r) - \Lambda_s Y(\Lambda_s r) - \frac{1}{2} (\Lambda_s^2 - m_s^2) r Y(\Lambda_s r) \right] \\ &\quad \times \int d\hat{r} \left[Y_l(\hat{r}) \otimes \langle \xi_1^{(\sigma)} | \right]_{1m_j}^* \left[Y_{l'}(\hat{r}) \otimes | \xi_1^{(\sigma)} \rangle \right]_{1m_j}, \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_{\text{sC2};ij}^{(l')} &= - \frac{1}{4M^2} \int dr r^{l+2} e^{-\nu_i r^2} \int d\hat{r} \left[Y_l(\hat{r}) \otimes \langle \xi_1^{(\sigma)} | \right]_{1m_j}^* \\ &\quad \times \left[\nabla^2 \left\{ m_s Y(m_s r) - \Lambda_s Y(\Lambda_s r) - \frac{1}{2} (\Lambda_s^2 - m_s^2) r Y(\Lambda_s r) \right\} \right. \\ &\quad \left. + \left\{ m_s Y(m_s r) - \Lambda_s Y(\Lambda_s r) - \frac{1}{2} (\Lambda_s^2 - m_s^2) r Y(\Lambda_s r) \right\} \nabla^2 \right] \\ &\quad \times r^{l'} e^{-\nu_j r^2} \left[Y_{l'}(\hat{r}) \otimes | \xi_1^{(\sigma)} \rangle \right]_{1m_j}. \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

また、スピン軌道力の行列要素 $\mathcal{W}_{\text{sSO};ij}^{(l')}$ は

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_{\text{sSO};ij}^{(l')} &= - \frac{1}{2} \int dr r^{l+l'+2} e^{-(\nu_i+\nu_j)r^2} \\ &\quad \times \left[m_s Z_1(m_s r) - \Lambda_s Z_1(\Lambda_s r) - \frac{1}{2} (\Lambda_s^2 - m_s^2) \frac{\Lambda_s}{M^2} Y(\Lambda_s r) \right] \\ &\quad \times \int d\hat{r} \left[Y_l(\hat{r}) \otimes \langle \xi_1^{(\sigma)} | \right]_{1m_j}^* \mathbf{L} \cdot \mathbf{S} \left[Y_{l'}(\hat{r}) \otimes | \xi_1^{(\sigma)} \rangle \right]_{1m_j}. \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

である。

式 (B.13) のアイソスピンに関する行列要素 $\langle \xi_{00}^{(\tau)} | \hat{V}_\tau | \xi_{00}^{(\tau)} \rangle$ は式 (B.5) で計算できる。

B.2.2 中心力

式 (B.15) の角度積分は簡単に実行でき、

$$\begin{aligned} &\int d\hat{r} \left[Y_l(\hat{r}) \otimes \langle \xi_1^{(\sigma)} | \right]_{1m_j}^* \left[Y_{l'}(\hat{r}) \otimes | \xi_1^{(\sigma)} \rangle \right]_{1m_j} \\ &= \sum_{\substack{mm' \\ M_S M'_S}} (lm1M_S|1m_j) (l'm'1M'_S|1m_j) \langle \xi_{1M_S}^{(\sigma)} | \xi_{1M'_S}^{(\sigma)} \rangle \int d\hat{r} Y_{lm}(\hat{r})^* Y_{l'm'}(\hat{r}) \\ &= \delta_{ll'}, \end{aligned} \quad (\text{B.18})$$

を得る。したがって、式 (B.15) は

一方、式 (B.16) は、微分を処理してから角度積分を行う。まず右側に微分を含む項、すなわち

$Y\nabla^2$ の項から考えよう。式 (22) で定義される微分演算子を改めて書いておくと、

$$\nabla^2 = \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} r - \frac{\mathbf{L}^2}{r^2}. \quad (\text{B.19})$$

であるので、まずは

$$\begin{aligned} & Y(m_s r) \nabla^2 r^{l'} e^{-\nu_j r^2} \left[Y_{l'}(\hat{\mathbf{r}}) \otimes |\xi_1^{(\sigma)}\rangle \right]_{1m_j} \\ &= Y(m_s r) \sum_{m' M'_S} (l' m' 1 M'_S | 1 m_j) |\xi_1^{(\sigma)}\rangle \left(\frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} r - \frac{\mathbf{L}^2}{r^2} \right) r^{l'} e^{-\nu_j r^2} Y_{l' m'}(\hat{\mathbf{r}}), \end{aligned} \quad (\text{B.20})$$

を計算する必要がある。2階微分については

$$\frac{d^2}{dr^2} \left(r^{l'+1} e^{-\nu_j r^2} \right) = \left[l'(l'+1)r^{l'-1} - 2(2l'+3)\nu_j r^{l'+1} + 4\nu_j^2 r^{l'+3} \right] e^{-\nu_j r^2}, \quad (\text{B.21})$$

を得る。また、球面調和関数は角運動量演算子の2乗の固有状態である：

$$\mathbf{L}^2 Y_{l' m'}(\hat{\mathbf{r}}) = l'(l'+1) Y_{l' m'}(\hat{\mathbf{r}}). \quad (\text{B.22})$$

したがって、式 (B.20) は

$$\begin{aligned} & Y(m_s r) \nabla^2 r^{l'} e^{-\nu_j r^2} \left[Y_{l'}(\hat{\mathbf{r}}) \otimes |\xi_1^{(\sigma)}\rangle \right]_{1m_j} \\ &= \frac{1}{m_s} \left[-2(2l'+3)\nu_j r^{l'-1} + 4\nu_j^2 r^{l'+1} \right] e^{-\nu_j r^2 - m_s r} \left[Y_{l'}(\hat{\mathbf{r}}) \otimes |\xi_1^{(\sigma)}\rangle \right]_{1m_j}, \end{aligned} \quad (\text{B.23})$$

という形に帰着する。式 (B.23) は m_s を Λ_s に置き換えた場合も当然成り立つ。

続いて $\nabla^2 Y$ を含む項

$$\begin{aligned} & \nabla^2 Y(m_s r) r^{l'} e^{-\nu_j r^2} \left[Y_{l'}(\hat{\mathbf{r}}) \otimes |\xi_1^{(\sigma)}\rangle \right]_{1m_j} \\ &= \frac{1}{m_s} \sum_{m' M'_S} (l' m' 1 M'_S | 1 m_j) |\xi_1^{(\sigma)}\rangle \left(\frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} r - \frac{\mathbf{L}^2}{r^2} \right) r^{l'-1} e^{-\nu_j r^2 - m_s r} Y_{l' m'}(\hat{\mathbf{r}}), \end{aligned} \quad (\text{B.24})$$

を考えよう。2階微分の部分は平方完成を用いて、

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dr^2} \left(r^{l'} e^{-\nu_j r^2 - m_s r} \right) &= e^{\frac{m_s^2}{4\nu_j}} \frac{d^2}{dr^2} \left[r^{l'} e^{-\nu_j \left(r + \frac{m_s}{2\nu_j} \right)^2} \right] \\ &= e^{\frac{m_s^2}{4\nu_j}} \left[l'(l'-1)r^{l'-2} - 2l' m_s r^{l'-1} + \{ m_s^2 - 2(2l'+1)\nu_j \} r^{l'} \right. \\ &\quad \left. + 4m_s \nu_j r^{l'+1} + 4\nu_j^2 r^{l'+2} \right] e^{-\nu_j \left(r + \frac{m_s}{2\nu_j} \right)^2}, \end{aligned} \quad (\text{B.25})$$

と計算できる。また、式 (B.22) を用いると、式 (B.24) は

$$\begin{aligned} & \nabla^2 Y(m_s r) r^{l'} e^{-\nu_j r^2} \left[Y_{l'}(\hat{\mathbf{r}}) \otimes |\xi_1^{(\sigma)}\rangle \right]_{1m_j} \\ &= \frac{1}{m_s} \left[-2l' r^{l'-3} - 2l' m_s r^{l'-2} + \{ m_s^2 - 2(2l'+1)\nu_j \} r^{l'-1} \right. \\ &\quad \left. + 4m_s \nu_j r^{l'} + 4\nu_j^2 r^{l'+1} \right] e^{-\nu_j r^2 - m_s r} \left[Y_{l'}(\hat{\mathbf{r}}) \otimes |\xi_1^{(\sigma)}\rangle \right]_{1m_j}, \end{aligned} \quad (\text{B.26})$$

となる。

最後に、式 (B.26) の ∇^2 の右側に r がかったものも計算しておく必要がある。これについては、式 (B.25) において $l' \rightarrow l' + 1$ とすることで簡便に求めることができる。結局、

$$\begin{aligned} & \nabla^2 Y(\Lambda_s r) r^{l'+1} e^{-\nu_j r^2} \left[Y_{l'}(\hat{r}) \otimes |\xi_1^{(\sigma)}\rangle \right]_{1m_j} \\ &= \frac{1}{\Lambda_s} \left[-2(l'+1)\Lambda_s r^{l'-1} + \{\Lambda_s^2 - 2(2l'+3)\nu_j\} r^{l'} \right. \\ & \quad \left. + 4\Lambda_s \nu_j r^{l'+1} + 4\nu_j^2 r^{l'+2} \right] e^{-\nu_j r^2 - m_s r} \left[Y_{l'}(\hat{r}) \otimes |\xi_1^{(\sigma)}\rangle \right]_{1m_j}, \end{aligned} \quad (\text{B.27})$$

を得る。なお、式 (B.23) の左に r を乗じたものも必要であるが、これは当然、式 (B.23) 右辺の r の次数を 1 つ増やせばよい。

以上より、式 (B.23), (B.26), (B.27) を用いることで、以下を得る：

$$\begin{aligned} & \left[\nabla^2 \left\{ m_s Y(m_s r) - \Lambda_s Y(\Lambda_s r) - \frac{1}{2} (\Lambda_s^2 - m_s^2) r Y(\Lambda_s r) \right\} \right. \\ & \quad \left. + \left\{ m_s Y(m_s r) - \Lambda_s Y(\Lambda_s r) - \frac{1}{2} (\Lambda_s^2 - m_s^2) r Y(\Lambda_s r) \right\} \nabla^2 \right] r^{l'} e^{-\nu_j r^2} \left[Y_{l'}(\hat{r}) \otimes |\xi_1^{(\sigma)}\rangle \right]_{1m_j} \\ &= \left[-2lr^{-3} (e^{-m_s r} - e^{-\Lambda_s r}) - 2lr^{-2} (m_s e^{-m_s r} - \Lambda_s e^{-\Lambda_s r}) \right. \\ & \quad + \{m_s^2 - 8(l+1)\nu_j\} r^{-1} (e^{-m_s r} - e^{-\Lambda_s r}) + l(\Lambda_s^2 - m_s^2) r^{-1} e^{-\Lambda_s r} \\ & \quad + 4\nu_j (m_s e^{-m_s r} - \Lambda_s e^{-\Lambda_s r}) - \frac{\Lambda_s^2 - m_s^2}{2\Lambda_s} \{\Lambda_s^2 - 4(2l+3)\nu_j\} e^{-\Lambda_s r} \\ & \quad + 8\nu_j^2 r (e^{-m_s r} - e^{-\Lambda_s r}) - 2(\Lambda_s^2 - m_s^2) \nu_j r e^{-\Lambda_s r} \\ & \quad \left. - 4 \frac{\Lambda_s^2 - m_s^2}{\Lambda_s} \nu_j^2 r^2 e^{-\Lambda_s r} \right] r^{l'} e^{-\nu_j r^2} \left[Y_{l'}(\hat{r}) \otimes |\xi_1^{(\sigma)}\rangle \right]_{1m_j}. \end{aligned} \quad (\text{B.28})$$

この結果から、式 (B.16) の角度積分は式 (B.7) と同じ形になることがわかる。

B.2.3 スピン軌道力

式 (B.17) は演算子 $\mathbf{L} \cdot \mathbf{S}$ を含む。これは $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$ より、

$$\mathbf{L} \cdot \mathbf{S} = \frac{1}{2} (\mathbf{J}^2 - \mathbf{L}^2 - \mathbf{S}^2), \quad (\text{B.29})$$

と変形するとよい。これらの演算子は

$$\mathbf{J}^2 \left| \left[Y_L \otimes \xi_S^{(\sigma)} \right]_{JM_J} \right\rangle = J(J+1) \left| \left[Y_L \otimes \xi_S^{(\sigma)} \right]_{JM_J} \right\rangle, \quad (\text{B.30})$$

$$\mathbf{L}^2 \left| \left[Y_L \otimes \xi_S^{(\sigma)} \right]_{JM_J} \right\rangle = L(L+1) \left| \left[Y_L \otimes \xi_S^{(\sigma)} \right]_{JM_J} \right\rangle, \quad (\text{B.31})$$

$$\mathbf{S}^2 \left| \left[Y_L \otimes \xi_S^{(\sigma)} \right]_{JM_J} \right\rangle = S(S+1) \left| \left[Y_L \otimes \xi_S^{(\sigma)} \right]_{JM_J} \right\rangle, \quad (\text{B.32})$$

という関係式を満たすため、式 (B.17) の波動関数に対して、

$$\mathbf{L} \cdot \mathbf{S} \left[Y_{l'}(\hat{\mathbf{r}}) \otimes |\xi_1^{(\sigma)}\rangle \right]_{1m_j} = -\frac{1}{2} l'(l'+1) \left[Y_{l'}(\hat{\mathbf{r}}) \otimes |\xi_1^{(\sigma)}\rangle \right]_{1m_j}, \quad (\text{B.33})$$

が得られる。そうすると、角度積分は式 (B.7) で計算することができる。

B.2.4 最終形

それぞれ式 (B.14) および式 (B.17) で与えられる中心力とスピン軌道力の行列要素は、式 (B.9) で定義した $G_{ij}^{(n)}$ を用いると、以下で与えられる:

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_{\text{sC};ij}^{(l'l')} &= -\delta_{ll'} \left[1 - \frac{1}{4} \left(\frac{m_s}{M} \right)^2 \right] \\ &\times \left[G_{ij}^{(2l+1)}(m_s) - G_{ij}^{(2l+1)}(\Lambda_s) - \frac{1}{2\Lambda_s} (\Lambda_s^2 - m_s^2) G_{ij}^{(2l+2)}(\Lambda_s) \right] + \mathcal{W}_{\text{sC}2;ij}^{(l'l')}, \end{aligned} \quad (\text{B.34})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_{\text{sC}2;ij}^{(l'l')} &= -\frac{1}{4M^2} \delta_{ll'} \left[-2l \left\{ G_{ij}^{(2l-1)}(m_s) - G_{ij}^{(2l-1)}(\Lambda_s) \right\} - 2l \left\{ m_s G_{ij}^{(2l)}(m_s) - \Lambda_s G_{ij}^{(2l)}(\Lambda_s) \right\} \right. \\ &+ \left\{ m_s^2 - 8(l+1)\nu_j \right\} \left\{ G_{ij}^{(2l+1)}(m_s) - G_{ij}^{(2l+1)}(\Lambda_s) \right\} + l (\Lambda_s^2 - m_s^2) G_{ij}^{(2l+1)}(\Lambda_s) \\ &+ 4\nu_j \left\{ m_s G_{ij}^{(2l+2)}(m_s) - \Lambda_s G_{ij}^{(2l+2)}(\Lambda_s) \right\} - \frac{\Lambda_s^2 - m_s^2}{2\Lambda_s} \left\{ \Lambda_s^2 - 4(2l+3)\nu_j \right\} G_{ij}^{(2l+2)}(\Lambda_s) \\ &+ 8\nu_j^2 \left\{ G_{ij}^{(2l+3)}(m_s) - G_{ij}^{(2l+3)}(\Lambda_s) \right\} - 2 (\Lambda_s^2 - m_s^2) \nu_j G_{ij}^{(2l+3)}(\Lambda_s) \\ &\left. - 4 \frac{\Lambda_s^2 - m_s^2}{\Lambda_s} \nu_j^2 G_{ij}^{(2l+4)}(\Lambda_s) \right], \end{aligned} \quad (\text{B.35})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_{\text{vSO};ij}^{(l'l')} &= \frac{1}{4} \delta_{ll'} l(l+1) \frac{1}{M^2} \left[G_{ij}^{(2l-1)}(m_v) - G_{ij}^{(2l-1)}(\Lambda_v) \right. \\ &\left. + m_v G_{ij}^{(2l)}(m_v) - \Lambda_v G_{ij}^{(2l)}(\Lambda_v) - \frac{\Lambda_v^2 - m_v^2}{2} G_{ij}^{(2l+1)}(\Lambda_v) \right]. \end{aligned} \quad (\text{B.36})$$

これらがスカラー中間子交換に対する行列要素の最終形である。なお、前述の通り、式 (B.36) から明らかのように、スピン軌道力は S 波状態 ($l=0$) には寄与せず、 $l=l'=2$ の D 波状態にのみ作用する。また、付録 D に $G_{ij}^{(n)}$ の計算における注意点をまとめている。

B.3 ベクトル中間子交換に対する 2 体行列要素

B.3.1 行列要素の概形

式 (B.1) の v に正規化されたポテンシャル $v_v^{(\text{reg})}$ を代入すると、2 体行列要素として以下を得る:

$$\mathcal{V}_{v;ij}^{(l'l')} = \frac{g_v^2}{4\pi} \langle \xi_{00}^{(\tau)} | \hat{V}_\tau | \xi_{00}^{(\tau)} \rangle N_i^{(l)} N_j^{(l')} \left[\mathcal{W}_{\text{vC};ij}^{(l'l')} + \mathcal{W}_{\text{vSO};ij}^{(l'l')} + \mathcal{W}_{\text{vT};ij}^{(l'l')} \right], \quad (\text{B.37})$$

となる。中心力の行列要素は3つの項に分けて定義しておく：

$$\mathcal{W}_{\text{vC};ij}^{(l')} = \mathcal{W}_{\text{vC1};ij}^{(l')} + \mathcal{W}_{\text{vC2};ij}^{(l')} + \mathcal{W}_{\text{vC3};ij}^{(l')}, \quad (\text{B.38})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_{\text{vC1};ij}^{(l')} &= \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{m_{\text{v}}}{M} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{f_{\text{v}}}{g_{\text{v}}} \left(\frac{m_{\text{v}}}{M} \right)^2 \right] \int dr r^{l+l'+2} e^{-(\nu_i+\nu_j)r^2} \\ &\times \left[m_{\text{v}} Y(m_{\text{v}}r) - \Lambda_{\text{v}} Y(\Lambda_{\text{v}}r) - \frac{1}{2} (\Lambda_{\text{v}}^2 - m_{\text{v}}^2) r Y(\Lambda_{\text{v}}r) \right] \\ &\times \int d\hat{\boldsymbol{r}} \left[Y_l(\hat{\boldsymbol{r}}) \otimes \langle \xi_1^{(\sigma)} | \right]_{1m_j}^* \left[Y_{l'}(\hat{\boldsymbol{r}}) \otimes | \xi_1^{(\sigma)} \rangle \right]_{1m_j}, \end{aligned} \quad (\text{B.39})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_{\text{vC2};ij}^{(l')} &= \frac{1}{6} \left[1 + 2 \frac{f_{\text{v}}}{g_{\text{v}}} + \left(\frac{f_{\text{v}}}{g_{\text{v}}} \right)^2 \right] \left(\frac{m_{\text{v}}}{M} \right)^2 \int dr r^{l+l'+2} e^{-(\nu_i+\nu_j)r^2} \\ &\times \left[m_{\text{v}} Y(m_{\text{v}}r) - \Lambda_{\text{v}} Y(\Lambda_{\text{v}}r) - \frac{1}{2} (\Lambda_{\text{v}}^2 - m_{\text{v}}^2) r Y(\Lambda_{\text{v}}r) \right] \\ &\times \int d\hat{\boldsymbol{r}} \left[Y_l(\hat{\boldsymbol{r}}) \otimes \langle \xi_1^{(\sigma)} | \right]_{1m_j}^* \boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2 \left[Y_{l'}(\hat{\boldsymbol{r}}) \otimes | \xi_1^{(\sigma)} \rangle \right]_{1m_j}, \end{aligned} \quad (\text{B.40})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_{\text{vC3};ij}^{(l')} &= -\frac{3}{4M^2} \int dr r^{l+2} e^{-\nu_i r^2} \int d\hat{\boldsymbol{r}} \left[Y_l(\hat{\boldsymbol{r}}) \otimes \langle \xi_1^{(\sigma)} | \right]_{1m_j}^* \boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2 \\ &\times \left[\nabla^2 \left\{ m_{\text{v}} Y(m_{\text{v}}r) - \Lambda_{\text{v}} Y(\Lambda_{\text{v}}r) - \frac{1}{2} (\Lambda_{\text{v}}^2 - m_{\text{v}}^2) r Y(\Lambda_{\text{v}}r) \right\} \right. \\ &\quad \left. + \left\{ m_{\text{v}} Y(m_{\text{v}}r) - \Lambda_{\text{v}} Y(\Lambda_{\text{v}}r) - \frac{1}{2} (\Lambda_{\text{v}}^2 - m_{\text{v}}^2) r Y(\Lambda_{\text{v}}r) \right\} \nabla^2 \right] \\ &\times r^{l'} e^{-\nu_j r^2} \left[Y_{l'}(\hat{\boldsymbol{r}}) \otimes | \xi_1^{(\sigma)} \rangle \right]_{1m_j}. \end{aligned} \quad (\text{B.41})$$

一方、スピン軌道力の行列要素 $\mathcal{W}_{\text{vSO};ij}^{(l')}$ とテンソル力の行列要素 $\mathcal{W}_{\text{vT};ij}^{(l')}$ は

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_{\text{vSO};ij}^{(l')} &= -\frac{1}{2} \left(3 + 4 \frac{f_{\text{v}}}{g_{\text{v}}} \right) \int dr r^{l+l'+2} e^{-(\nu_i+\nu_j)r^2} \\ &\times \left[m_{\text{v}} Z_1(m_{\text{v}}r) - \Lambda_{\text{v}} Z_1(\Lambda_{\text{v}}r) - \frac{1}{2} (\Lambda_{\text{v}}^2 - m_{\text{v}}^2) \frac{\Lambda_{\text{v}}}{M^2} Y(\Lambda_{\text{v}}r) \right] \\ &\times \int d\hat{\boldsymbol{r}} \left[Y_l(\hat{\boldsymbol{r}}) \otimes \langle \xi_1^{(\sigma)} | \right]_{1m_j}^* \boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{S} \left[Y_{l'}(\hat{\boldsymbol{r}}) \otimes | \xi_1^{(\sigma)} \rangle \right]_{1m_j}, \end{aligned} \quad (\text{B.42})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_{\text{vT};ij}^{(l')} &= -\frac{1}{12} \left[1 + 2 \frac{f_{\text{v}}}{g_{\text{v}}} + \left(\frac{f_{\text{v}}}{g_{\text{v}}} \right)^2 \right] \int dr r^{l+l'+2} e^{-(\nu_i+\nu_j)r^2} \\ &\times \left[m_{\text{v}} Z(m_{\text{v}}r) - \Lambda_{\text{v}} Z(\Lambda_{\text{v}}r) - \frac{1}{2} (\Lambda_{\text{v}}^2 - m_{\text{v}}^2) \frac{\Lambda_{\text{v}} + \Lambda_{\text{v}}^2 r}{M^2} Y(\Lambda_{\text{v}}r) \right] \\ &\times \int d\hat{\boldsymbol{r}} \left[Y_l(\hat{\boldsymbol{r}}) \otimes \langle \xi_1^{(\sigma)} | \right]_{1m_j}^* \mathcal{S}_{12}(\hat{\boldsymbol{r}}) \left[Y_{l'}(\hat{\boldsymbol{r}}) \otimes | \xi_1^{(\sigma)} \rangle \right]_{1m_j}, \end{aligned} \quad (\text{B.43})$$

である。

式 (B.37) が含むアイソスピン行列要素 $\langle \xi_{00}^{(\tau)} | \hat{V}_{\tau} | \xi_{00}^{(\tau)} \rangle$ はこれまでと同様に式 (B.5) で計算可能である。

B.3.2 最終形

式 (B.38) から式 (B.43) に現れる角度積分や微分演算子、さらにはスピン軌道力とテンソル力のそれぞれの演算子 $L \cdot S$ と S_{12} の扱いについては、擬スカラーおよびスカラー中間子交換の行列要素の計算と同じである。

具体的に書くと、中心力に関しては、式 (B.39) の角度積分は式 (B.18) で、式 (B.40) の $\sigma_1 \cdot \sigma_2$ を含む角度積分は式 (B.7) で、式 (B.41) の微分を含む角度積分は式 (B.18), (B.23), (B.26) で計算できる。また、スピン軌道力とテンソル力についても、それぞれ式 (B.33) と式 (B.8) が適用できる。

したがって、ベクトル中間子交換に対する行列要素の最終形は以下のように書ける：

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_{\text{VC};ij}^{(l')} &= \delta_{ll'} \left[1 - \frac{2}{3} \left(\frac{m_v}{M} \right)^2 + \frac{5}{6} \frac{f_v}{g_v} \left(\frac{m_v}{M} \right)^2 + \frac{1}{6} \left(\frac{f_v}{g_v} \right)^2 \left(\frac{m_v}{M} \right)^2 \right] \\ &\quad \times \left[G_{ij}^{(2l+1)}(m_v) - G_{ij}^{(2l+1)}(\Lambda_v) - \frac{\Lambda_v^2 - m_v^2}{2\Lambda_v} G_{ij}^{(2l+2)}(\Lambda_v) \right] + \mathcal{W}_{\text{VC};ij}^{(l')}, \end{aligned} \quad (\text{B.44})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_{\text{VC};ij}^{(l')} &= -\frac{3}{4M^2} \delta_{ll'} \left[-2l \left\{ G_{ij}^{(2l-1)}(m_v) - G_{ij}^{(2l-1)}(\Lambda_v) \right\} - 2l \left\{ m_v G_{ij}^{(2l)}(m_v) - \Lambda_v G_{ij}^{(2l)}(\Lambda_v) \right\} \right. \\ &\quad + \left\{ m_v^2 - 8(l+1)\nu_j \right\} \left\{ G_{ij}^{(2l+1)}(m_v) - G_{ij}^{(2l+1)}(\Lambda_v) \right\} + l \left(\Lambda_v^2 - m_v^2 \right) G_{ij}^{(2l+1)}(\Lambda_v) \\ &\quad + 4\nu_j \left\{ m_v G_{ij}^{(2l+2)}(m_v) - \Lambda_v G_{ij}^{(2l+2)}(\Lambda_v) \right\} - \frac{\Lambda_v^2 - m_v^2}{2\Lambda_v} \left\{ \Lambda_v^2 - 4(2l+3)\nu_j \right\} G_{ij}^{(2l+2)}(\Lambda_v) \\ &\quad + 8\nu_j^2 \left\{ G_{ij}^{(2l+3)}(m_v) - G_{ij}^{(2l+3)}(\Lambda_v) \right\} - 2 \left(\Lambda_v^2 - m_v^2 \right) \nu_j G_{ij}^{(2l+3)}(\Lambda_v) \\ &\quad \left. - 4 \frac{\Lambda_v^2 - m_v^2}{\Lambda_v} \nu_j^2 G_{ij}^{(2l+4)}(\Lambda_v) \right], \end{aligned} \quad (\text{B.45})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_{\text{VSO};ij}^{(l')} &= \frac{1}{4} \delta_{ll'} l(l+1) \left(3 + 4 \frac{f_v}{g_v} \right) \frac{1}{M^2} \\ &\quad \times \left[G_{ij}^{(2l-1)}(m_v) - G_{ij}^{(2l-1)}(\Lambda_v) + m_v G_{ij}^{(2l)}(m_v) - \Lambda_v G_{ij}^{(2l)}(\Lambda_v) - \frac{\Lambda_v^2 - m_v^2}{2} G_{ij}^{(2l+1)}(\Lambda_v) \right], \end{aligned} \quad (\text{B.46})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_{\text{VT};ij}^{(l')} &= -\frac{1}{12} f_{\text{T}}^{(l')} \left[1 + 2 \frac{f_v}{g_v} + \left(\frac{f_v}{g_v} \right)^2 \right] \frac{1}{M^2} \\ &\quad \times \left[3 \left\{ G_{ij}^{(l+l'-1)}(m_v) - G_{ij}^{(l+l'-1)}(\Lambda_v) \right\} + 3 \left\{ m_v G_{ij}^{(l+l')}(m_v) - \Lambda_v G_{ij}^{(l+l')}(\Lambda_v) \right\} \right. \\ &\quad \left. + \left\{ m_v^2 G_{ij}^{(l+l'+1)}(m_v) - \frac{1}{2} (3\Lambda_v^2 - m_v^2) G_{ij}^{(l+l'+1)}(\Lambda_v) \right\} - \frac{1}{2} (\Lambda_v^2 - m_v^2) \Lambda_v G_{ij}^{(l+l'+2)}(\Lambda_v) \right]. \end{aligned} \quad (\text{B.47})$$

ここで、 $G_{ij}^{(n)}$ は式 (B.9) で定義されており、その計算については付録 D を参照してほしい。

表 C.1 文献 [5,6] に基づく OBEP のパラメータ。ただし、 $\alpha = \{\text{ps}, \text{s}, \text{v}\}$ であり、中間子のアイソスピン、すなわちアイソスカラー (is) かアイソベクトル (iv) かも併記した。なお、 σ 中間子に関するパラメータは出版された文献には公開されていない [11]。また、“Bonn-OBEP-A” [1] と同様、 $f_\rho/g_\rho = 6.1$, $f_\omega/g_\omega = 0.0$ とした。

Meson	m_α (MeV)	$g_\alpha^2/(4\pi)$ (MeV)
π (ps, iv)	137.27	13.6
σ (s, is)	550.0	7.7823
ρ (v, iv)	769.9	0.84
ω (v, is)	781.94	20.0

表 C.2 文献 [5,6] に基づく OBEP のカットオフ運動量 Λ_α 。取り入れる中間子を第 1 カラムに記した。括弧内の値は今回の計算に整合するように値を微調整したものである。

Meson	Λ_α (MeV)
π	830.0 (832.3)
$\pi\sigma$	681.0 (686.7)
$\pi\rho\omega$	846.0 (846.3)
$\pi\sigma\rho\omega$	710.0 (13.58)

なお、速度依存項に起因する式 (B.45) において、 $G_{ij}^{(2l-1)}$ と $G_{ij}^{(2l)}$ を含む項、そして $l(\Lambda_v^2 - m_v^2)G_{ij}^{(2l+1)}$ という項は係数に l を含むため、 S 波状態に対しては寄与しない。同様に、式 (B.46) でも S 波の寄与はゼロである。また、式 (B.47) が含む係数 $f_T^{(ll')}$ は式 (B.12) によって計算できる。

付録 C ボソン交換ポテンシャルのパラメータ

C.1 山口らのボソン交換ポテンシャル

山口らは交換する中間子の種類を変えた OBEP を提案している [5,6]。そして、カットオフ運動量はすべての中間子交換に対して共通の値を用いている。すなわち、 $\Lambda_{\text{ps}} = \Lambda_{\text{s}} = \Lambda_{\text{v}}$ である。具体的なパラメータを表 C.1 および表 C.2 にまとめた。

なお、今回の計算で重陽子の基底状態エネルギーを精密に求めるために、表 C.2 のカットオフ運動

表 C.3 Bonn グループが求めた非相対論的な座標空間での OBEP, “Bonn-OBEP-A”, のパラメータ [1]. 表記の定義は表 C.1 と同じである。また、 $f_\rho/g_\rho = 6.1$, $f_\omega/g_\omega = 0.0$ である。なお、アイソスピン一重項 ($T = 0$) のパラメータのみを掲載している。カットオフ運動量 Λ_α の括弧内の値は、式 (31) に基づく今回の計算に整合するように値を微調整したものである。

Meson	m_α (MeV)	$g_\alpha^2/(4\pi)$ (MeV)	Λ_α (GeV)
π (ps, iv)	138.03	14.9	1.3 (1.3)
η (ps, is)	548.8	2.0	1.5 (1.5)
σ (s, is)	710.0	17.6205	2.0 (1.471)
ρ (v, iv)	769.0	1.2	1.2 (1.05)
ω (v, is)	782.6	25.0	1.4 (1.55)
δ (s, iv)	983.0	2.742	2.0 (2.0)

量を山口らが使用した値から微修正している (括弧内の値)。その主な原因は、山口らはスピン軌道力を見逃していること、速度依存項を見逃していること、そして使用した物理定数などが完全には一致していない可能性があることである [11]。ただし、カットオフ運動量の変更の大きさはいずれも 1% 以下であり、計算の違いが重陽子の基底状態エネルギーには基本的に影響しないことを示唆している。

C.2 Bonn グループによるボソン交換ポテンシャル

文献 [1] にまとめられた Bonn グループの OBEP のパラメータを表 C.3 にまとめた。中間子の質量の軽い方から順に並べており、擬スカラー (ps), スカラー (s), そしてベクトル (v) という分類に加え中間子のアイソスピン、すなわちアイソスカラー (is) かアイソベクトル (iv) かも併記した。

Bonn グループの OBEP はいくつかバリエーションがあり、ここでは非相対論的かつ座標空間での局所的なポテンシャル A, “Bonn-OBEP-A”, を採用する。また、パラメータは 2 核子系のアイソスピン T に依存するが、今は重陽子の計算を念頭に置いているため、 $T = 0$ のパラメータを掲載した。

なお、表 C.3 の第 4 列に示したカットオフ運動量 Λ_α に関しては、式 (31) に基づく今回の計算に整合するように値を調整している。その変更した値は括弧内に示している。

付録 D 動径積分の解析解

付録 B で現れた動径積分について考察する。式 (B.9) を簡単化するため、 $\nu = \nu_i + \nu_j$ とする:

$$G_{ij}^{(n)}(m) = \int_0^\infty dr r^n e^{-\nu r^2 - mr}. \quad (\text{D.1})$$

この積分は解析的に求めることができ、以下でまとめる。しかし、数値計算では、 $G_{ij}^{(n)}$ が解析的に求められているにも関わらず、発散や桁落ちが問題となることがしばしば起こる。

結論から書くと、今回の OBEP の行列要素の計算においては、式 (D.1) をそのまま数値積分してしまうほうがよい。あるいは、よく採用される方法として、被積分関数を複数のガウス関数の重ね合わせでフィットし、ガウス積分を解析的に実行するというものもある。しかし、ガウス関数の展開精度を気にする必要があることに加え、展開に関する和が結局は残るため、計算の手間という点では数値積分をすることと本質的には変わらない。

D.1 解析解その 1

文献 [12] によると、 $G_{ij}^{(n)}$ には解析解があり、それは以下で与えられる:

$$\begin{aligned} G_{ij}^{(n)}(m) &= \int_0^\infty dr r^n e^{-\nu r^2 - mr} \\ &= (2\nu)^{-(n+1)/2} \Gamma(n+1) \exp\left(\frac{m^2}{8\nu}\right) D_{-n-1}\left(\frac{m}{\sqrt{2\nu}}\right). \end{aligned} \quad (\text{D.2})$$

ここで Γ と D_{-n-1} はそれぞれガンマ関数と放物線円筒関数である。式 (D.2) の右辺には指数関数があり、引数が大きくなるとこれが発散しうる。これを避けるために、放物線円筒関数を合流型超幾何関数による表現 [13],

$$\begin{aligned} &\exp\left(\frac{m^2}{8\nu}\right) D_{-n-1}\left(\frac{m}{\sqrt{2\nu}}\right) \\ &= 2^{-(n+1)/2} \left[\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)} {}_1F_1\left(\frac{n+1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{m^2}{2\nu}\right) - \frac{\sqrt{2\pi} \frac{m}{\sqrt{2\nu}}}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)} {}_1F_1\left(\frac{n+2}{2}, \frac{3}{2}, \frac{m^2}{2\nu}\right) \right], \end{aligned} \quad (\text{D.3})$$

が有用に思われる。ここで合流型超幾何関数 ${}_1F_1$ は以下で定義される:

$${}_1F_1(\alpha, \beta, z) = \sum_n \frac{\alpha^{(n)} z^n}{\beta^{(n)} n!}. \quad (\text{D.4})$$

ただし、上昇階乗乗は $\alpha^{(n)} = \alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+n-1)$ で与えられる。

しかし実際には、合流型超幾何関数 ${}_1F_1$ も第三引数が大きいときに発散するため、数値計算では実装することは難しい。引数が大きくなるときは、 $m = \Lambda_\alpha$ として $\sim 1 \text{ GeV}/(\hbar c)$ のオーダーの運動量

カットオフを代入し、なおかつガウス基底のレンジパラメータが小さい場合 ($\nu_i + \nu_j \ll 1 \text{ fm}^{-2}$) に該当する。

D.2 解析解その2

次に、 $G_{ij}^{(n)}$ の解析解を、合流型超幾何関数を用いることなく求めてみよう。平方完成と積分変数の置き換えを行うと、式 (D.1) は以下のように変形できる:

$$\begin{aligned} G_{ij}^{(n)}(m) &= e^{\frac{m^2}{4\nu}} \int_0^\infty dr r^n e^{-\nu(r+\frac{m}{2\nu})^2} \\ &= e^{\nu\gamma^2} \int_\gamma^\infty dx (x-\gamma)^n e^{-\nu x^2} \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-\gamma)^{n-k} I_k(\nu, \gamma), \end{aligned} \quad (\text{D.5})$$

$$I_k(\nu, \gamma) = e^{\nu\gamma^2} \int_\gamma^\infty dx x^k e^{-\nu x^2}. \quad (\text{D.6})$$

ただし、 $\gamma = m/(2\nu)$ および $x = r + \gamma$ であり、二項係数は

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}, \quad (\text{D.7})$$

である。したがって、OBEP の行列要素を計算するためには、式 (D.6) で定義される I_k を $k=0-8$ について求めればよい。

まず、 I_0 は相補誤差関数で書ける:

$$\begin{aligned} I_0(\nu, \gamma) &= \frac{1}{\sqrt{\nu}} e^{\nu\gamma^2} \int_{\sqrt{\nu}\gamma}^\infty dX e^{-X^2} \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{1}{\sqrt{\nu}} e^{\nu\gamma^2} \text{erfc}(\sqrt{\nu}\gamma). \end{aligned} \quad (\text{D.8})$$

ただし、相補誤差関数は

$$\text{erfc}(x) = 1 - \text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty dt e^{-t^2} - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x dt e^{-t^2} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty dt e^{-t^2}, \quad (\text{D.9})$$

で定義される。

次に、 $k > 0$ に対する I_k の計算には、以下の関係式が便利である:

$$\frac{d}{dx} e^{-\nu x^2} = -2\nu x e^{-\nu x^2}, \quad (\text{D.10})$$

$$\frac{d}{d\nu} e^{-\nu x^2} = -x^2 e^{-\nu x^2}. \quad (\text{D.11})$$

式 (D.10) より、 I_1 は以下のように計算できる:

$$\begin{aligned}
I_1(\nu, \gamma) &= -\frac{1}{2\nu} e^{\nu\gamma^2} \int_{\gamma}^{\infty} dx \frac{d}{dx} e^{-\nu x^2} \\
&= -\frac{1}{2\nu} e^{\nu\gamma^2} \left[e^{-\nu x^2} \right]_{\gamma}^{\infty} \\
&= \frac{1}{2\nu}.
\end{aligned} \tag{D.12}$$

同様に、 I_2 も

$$\begin{aligned}
I_2(\nu, \gamma) &= -e^{\nu\gamma^2} \frac{d}{d\nu} \int_{\gamma}^{\infty} dx e^{-\nu x^2} \\
&= -\frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{\nu\gamma^2} \frac{d}{d\nu} \left[\frac{1}{\sqrt{\nu}} \operatorname{erfc}(\sqrt{\nu}\gamma) \right]. \\
&= -\frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{\nu\gamma^2} \left[-\frac{1}{2} \nu^{-3/2} \operatorname{erfc}(\sqrt{\nu}\gamma) + \frac{1}{\sqrt{\nu}} \frac{d}{d\nu} \operatorname{erfc}(\sqrt{\nu}\gamma) \right],
\end{aligned} \tag{D.13}$$

となる。ここで相補誤差関数の微分は

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\nu} \operatorname{erfc}(\sqrt{\nu}\gamma) &= -\frac{d}{d\nu} \operatorname{erf}(\sqrt{\nu}\gamma) \\
&= -\frac{\gamma}{2\sqrt{\nu}} \frac{d}{d\Gamma} \operatorname{erf}(\Gamma) \\
&= -\frac{\gamma}{2\sqrt{\nu}} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{d}{d\Gamma} \int_0^{\Gamma} dt e^{-t^2} \\
&= -\frac{\gamma}{\sqrt{\pi\nu}} e^{-\nu\gamma^2},
\end{aligned} \tag{D.14}$$

と計算できる。ただし、 $\Gamma = \sqrt{\nu}\gamma$ である。また、任意の関数 F とその微分 f に対する関係式

$$\frac{d}{dx} \int_a^x dt f(t) = \frac{d}{dx} [F(x) - F(a)] = \frac{d}{dx} F(x) = f(x), \tag{D.15}$$

を用いた。ここで a は定数である。最終的に式 (D.13) は以下のように簡単になる:

$$I_2(\nu, \gamma) = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\pi}{\nu^3}} e^{\nu\gamma^2} \operatorname{erfc}(\sqrt{\nu}\gamma) + \frac{\gamma}{2\nu}. \tag{D.16}$$

原理的には、同様の方法で $k \geq 3$ に対する I_k を計算可能である。実際にはこれは面倒なので、導出には Mathematica [14] を用いることにする。その結果を表 D.1 にまとめる。

このように I_k が解析的に求まったため、 $G_{ij}^{(n)}$ も式 (D.5) で計算できるはずである。しかし、数値計算では、式 (D.5) に現れる $\exp(\nu\gamma^2)$ が大きな引数のときに発散するという問題が生じる。これを避けるには、この指数関数が常に $\exp(\nu\gamma^2) \operatorname{erfc}(\sqrt{\nu}\gamma)$ の形で現れることを利用する。すなわち、相補誤差関数の漸近展開 [15]

$$\operatorname{erfc}(x) \sim \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{\pi}x} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-)^s (2s-1)!!}{(2x^2)^s} \quad (x \rightarrow \infty), \tag{D.17}$$

表 D.1 Mathematica [14] による積分 I_k の解析解。ただし、関数 A は式 (D.18) で定義しており、 $\sqrt{\nu\gamma}$ が大きいときには、 A の漸近展開を用いるとよい。

k	$I_k(\nu, \gamma) = e^{\nu\gamma^2} \int_{\gamma}^{\infty} dx x^k e^{-\nu x^2}$
0	$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\nu}} A(\sqrt{\nu\gamma})$
1	$\frac{1}{2\nu}$
2	$\frac{1}{4} \sqrt{\frac{\pi}{\nu^3}} A(\sqrt{\nu\gamma}) + \frac{\gamma}{2\nu}$
3	$\frac{\nu\gamma^2+1}{2\nu^2}$
4	$\frac{3}{8} \sqrt{\frac{\pi}{\nu^5}} A(\sqrt{\nu\gamma}) + \frac{\gamma(2\nu\gamma^2+3)}{4\nu^2}$
5	$\frac{\nu\gamma^2(\nu\gamma^2+2)+2}{2\nu^3}$
6	$\frac{15}{16} \sqrt{\frac{\pi}{\nu^7}} A(\sqrt{\nu\gamma}) + \frac{\gamma[2\nu\gamma^2(2\nu\gamma^2+5)+15]}{8\nu^3}$
7	$\frac{\nu\gamma^2[\nu\gamma^2(\nu\gamma^2+3)+6]+6}{2\nu^4}$
8	$\frac{105}{32} \sqrt{\frac{\pi}{\nu^9}} A(\sqrt{\nu\gamma}) + \frac{\gamma[2\nu\gamma^2\{2\nu\gamma^2(2\nu\gamma^2+7)+35\}+105]}{16\nu^4}$

を利用するとよい。実際、今は相補誤差関数の引数が大きい場合を問題にしているのので、この展開が有用である。したがって、

$$A(x) = \begin{cases} e^x \operatorname{erfc}(x) & (x \leq x_0), \\ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^3} + \frac{3}{4x^5} - \frac{15}{8x^7} + \mathcal{O}(x^{-9}) \right] & (x > x_0), \end{cases} \quad (\text{D.18})$$

を用いて発散の問題を回避することができる。ただし、 x_0 は $\exp(x_0^2)$ が非常に大きくなるような値であり、例えば $x_0 = 10$ である。

これで数値計算上のオーバーフローを避けて I_k を求めることができる。しかし、次は桁落ちが問題となりうる。これを明確にするために、式 (D.5) を以下の形に書き換えよう：

$$G_{ij}^{(n)}(m) = \binom{n}{0} (-\gamma)^n I_0(\nu, \gamma) + \binom{n}{1} (-\gamma)^{n-1} I_1(\nu, \gamma) + \binom{n}{2} (-\gamma)^{n-2} I_2(\nu, \gamma) + \dots \quad (\text{D.19})$$

式 (D.19) からわかるように、 n を定めたとき、 k の偶数次項と奇数次項で $(-\gamma)^{n-k}$ の符号がそれぞれ正と負になる。なお、二項係数および I_k はともに正である。そして問題となるのは、 I_k が非常に大きな値を取りうる場合である。これは γ が大きい場合、すなわち、第 D.1 節でも記述の通り、 $m = \Lambda_\alpha \sim 1 \text{ GeV}/(\hbar c)$ かつ、 $\nu \ll 1 \text{ fm}^{-2}$ という場合に対応する。このとき、 $\binom{n}{k} (-\gamma)^{n-k} I_k$ は、例えば $\sim 10^{16} \text{ fm}^{n+1}$ などの大きな値をもつものの、これとは符号の異なる $k+1$ 番目の項 $\binom{n}{k+1} (-\gamma)^{n-k-1} I_{k+1}$ (やはり絶対は大きな数) を足すことにより、これらの和は小さな値 (例えば

$\sim 10^{-1} \text{ fm}^{n+1}$) となりうる。そうすると、さらに次の $k+2$ 番目のステップで、逐次的な和と比較して絶対値が何桁も異なる数を足すため、精度が失われ、その結果 $G_{ij}^{(n)}(\Lambda_\alpha)$ が正しく計算できなくなる。

桁落ちを避ける数値計算上の処方、例えば Kahan の加算アルゴリズム [16] や、Python の `math.fsum` による演算も知られているが、 $G_{ij}^{(n)}(\Lambda_\alpha)$ の計算ではこれらは機能しなかった。なお、運動量カットオフではなく、中間子の質量を引数としたときの計算、すなわち $G_{ij}^{(n)}(m_\alpha)$ では、桁落ちは問題にならない。

参考文献

- [1] R. Machleidt, *The Meson Theory of Nuclear Forces and Nuclear Structure* (Springer US, Boston, MA, 1989), pp. 189–376.
- [2] Yamaguchi, Yasuhiro, *Exotic few-baryon systems with a heavy meson*, Phd thesis, Osaka University, 2014, https://ir.library.osaka-u.ac.jp/repo/ouka/all/34050/?lang=0&mode=1&opkey=R174059526215069&idx=1&chk_schema=1000&codeno=&fc_val=&chk_clskey=doctoral_thesis_with_full_text&chk_st=0&check=0.
- [3] R. Machleidt, K. Holinde, and C. Elster, *Phys. Rep.* **149**, 1 (1987).
- [4] R. Tamagaki, *Prog. Theor. Phys.* **39**, 91 (1968).
- [5] Y. Yamaguchi, S. Ohkoda, S. Yasui, and A. Hosaka, *Phys. Rev. D* **84**, 014032 (2011).
- [6] Y. Yamaguchi, A. Hosaka, S. Takeuchi, and M. Takizawa, *Jour. Phys. G* **47**, 053001 (2020).
- [7] M. Lacombe, B. Loiseau, J. M. Richard, R. V. Mau, J. Côté, P. Pirès, and R. de Tourreil, *Phys. Rev. C* **21**, 861 (1980).
- [8] R. Machleidt, *Phys. Rev. C* **63**, 024001 (2001).
- [9] V. G. J. Stoks, R. A. M. Klomp, C. P. F. Terheggen, and J. J. de Swart, *Phys. Rev. C* **49**, 2950 (1994).
- [10] E. Hiyama, Y. Kino, and M. Kamimura, *Prog. Part. Nucl. Phys.* **51**, 223 (2003).
- [11] Yamaguchi, Yasuhiro, Private communication, 2025.
- [12] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, *Table of integrals, series, and products*, Seventh ed. (Elsevier/Academic Press, Amsterdam, 2007), p. 365.
- [13] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, *Table of integrals, series, and products*, Seventh ed. (Elsevier/Academic Press, Amsterdam, 2007), p. 1028.
- [14] Wolfram Research, Inc., *Mathematica*, Version 12.0.0.0, Champaign, IL (2002).
- [15] F. W. J. Olver, *ASYMPTOTICS AND SPECIAL FUNCTIONS* (ACADEMIC PRESS, New York and London, 1974), pp. 66–105.
- [16] W. Kahan, *Commun. ACM* **8**, 40 (1965).