

筑波大学 集中講義 2025
原子核理論特講 II 「ハズオンで学ぶ核力の基礎」
— 第二回「湯川ポテンシャル」 —

福井 徳朗 ^{*†}

25 February 2025

概要

核力の中間子論について、その導入部分を学ぶ。具体的には、中間子の交換によって核子間の相互作用が湯川ポテンシャルで表されることに焦点を合わせる。また、変分原理に基づく束縛問題の解法を習得することを目指す。

目次

1 湯川ポテンシャル	1
2 変分原理に基づく束縛問題の解法 —Rayleigh–Ritz の変分法—	2
付録 A ガウス関数展開法	5
A.1 波動関数	5
A.2 行列要素の計算	8

^{*} 九州大学基幹教育院

[†] tokuro.fukui@artsci.kyushu-u.ac.jp

1 湯川ポテンシャル

これまでは核力を井戸型ポテンシャルで近似してきたが、ここではより現実的な関数形で核力を表現しようⁱ。そのようなポテンシャルは 2 核子間の距離 r の関数として

$$v(r) = -g^2 \frac{e^{-m_\alpha r}}{r}, \quad (1)$$

と表現される。このようなポテンシャルを湯川ポテンシャルと呼ぶ。また、 m_α は 2 つの核子間で交換される中間子の質量を表し、 g^2 はポテンシャルの強さを表す結合定数である。

以下では簡単のため、電子間の Coulomb ポテンシャルとの類推から式 (1) を導出する。なお、ここでの議論は文献 [1] に依拠している。最初に Coulomb ポテンシャルと湯川ポテンシャルの対応関係を表 1 に示しておく。

まず Coulomb 相互作用の場合、位置 $\mathbf{r}_i$ におけるスカラーポテンシャル $\Phi^{(i)}$ は次の Poisson 方程式を満たす：

$$\nabla^2 \Phi^{(i)}(\mathbf{r}) = -4\pi e \delta(\mathbf{r}). \quad (2)$$

ここで e は電荷素量であり、Gauss 単位系に基づいている。このとき、運動量の量子化 $\mathbf{p} = -i\nabla$ を用いると式 (2) は

$$\mathbf{p}^2 \Phi(\mathbf{r}) = 4\pi e \delta(\mathbf{r}), \quad (3)$$

と書ける。ただし自然単位系 $\hbar = c = 1$ を用いる。次に式 (3) を質量 m_α の中間子場 $\Phi^{(i)}$ に拡張しよう。相対論的なエネルギーと運動量の関係から、 $\mathbf{p}^2 \rightarrow \mathbf{p}^2 + m_\alpha^2$ と置き換え、また結合定数も $e \rightarrow g$ とする。すると、場の方程式は以下となる：

$$[\nabla^2 - m_\alpha^2] \Phi^{(i)}(\mathbf{r}) = -4\pi g \delta(\mathbf{r}). \quad (4)$$

この解は

$$\Phi^{(i)}(\mathbf{r}) = g \frac{e^{-m_\alpha |\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|}, \quad (5)$$

であることが知られている。

相互作用ポテンシャル v は、 $\mathbf{r}_j$ にある点源 $\rho^{(j)}(\mathbf{r}) = g\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j)$ で $\Phi^{(i)}$ を畳み込んだ形で定義される：

$$\begin{aligned} v(r_{ij}) &= - \int d\mathbf{r} \rho^{(j)}(\mathbf{r}) \Phi^{(i)}(\mathbf{r}) \\ &= -g^2 \frac{e^{-m_\alpha r_{ij}}}{r_{ij}}. \end{aligned} \quad (6)$$

ⁱ 依然としてスピンやアイソスピン、そして角運動量などに依存しない中心力のみを扱う。その意味で現実的な核力とはやはり程遠い。

表 1 Coulomb 相互作用と湯川型相互作用の比較。

	Coulomb 相互作用	湯川相互作用
相互作用ポテンシャル	e^2/r	$g^2 e^{-m_\alpha r}/r$
交換する粒子の質量	0	m_α
結合定数	e	g
場の方程式	$\nabla^2 \Phi(\mathbf{r}) = -4\pi e \delta(\mathbf{r})$	$(\nabla^2 - m_\alpha^2) \Phi^{(i)}(\mathbf{r}) = -4\pi g \delta(\mathbf{r})$
$\mathbf{r}_i$ における場	$\Phi^{(i)}(\mathbf{r}) = e/ \mathbf{r} - \mathbf{r}_i $ (Coulomb 場)	$\Phi^{(i)}(\mathbf{r}) = g e^{-m_\alpha \mathbf{r} - \mathbf{r}_i }/ \mathbf{r} - \mathbf{r}_i $ (中間子場)

2 核子間の相対距離の大きさは $r_{ij} = |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|$ で定義される。こうして湯川ポテンシャルが導かれる。

2 変分原理に基づく束縛問題の解法 —Rayleigh–Ritz の変分法—

重陽子を構成する陽子と中性子間の相互作用が中心力の湯川ポテンシャルで与えられる場合を考え、数値計算によって重陽子の束縛エネルギーと波動関数を求めよう。そのために、まずは Ritz の変分原理をおさえておこう。これは、端的には以下で表現できる：

$$\epsilon[\psi] = \frac{\langle \psi | \hat{H} | \psi \rangle}{\langle \psi | \psi \rangle} \geq E_0. \quad (7)$$

ただし、 $\hat{H}$ はハミルトニアン、そしてその最低固有値、つまり基底状態のエネルギーを E_0 とした。また、 $|\psi\rangle$ は基底状態を近似した任意の状態を表し、 $\epsilon[\psi]$ は $|\psi\rangle$ の汎関数として表現したエネルギーである。式 (7) が意味するのは、近似した波動関数によるハミルトニアンの期待値は、基底状態のエネルギーよりも常に大きいか等しいということである。 $\epsilon[\psi] = E_0$ となるのは $|\psi\rangle$ が真の基底状態のときのみである。

この変分原理は以下のことと等価である。すなわち、定常状態の Schrödinger 方程式

$$[\hat{H} - E] |\psi\rangle = 0, \quad (8)$$

において、微小変分 $\delta|\psi\rangle$ によって $|\psi\rangle \rightarrow |\psi\rangle + \delta|\psi\rangle$ としたとき、汎関数 $\epsilon[\psi] = \langle \psi | \hat{H} | \psi \rangle / \langle \psi | \psi \rangle$ の停留値が固有エネルギー E であり、そのときの $|\psi\rangle$ が固有関数となる。

$|\psi\rangle$ に微小変分を与える代わりに、試行関数を用いて $|\psi\rangle$ を表現した束縛問題の解法が Rayleigh–Ritz の変分法である。具体例として 2 体束縛問題に対する動径運動の Schrödinger 方程式

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2}{dr^2} + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu r^2} + v(r) - E \right] u_l(r) = 0, \quad (9)$$

を考えよう。ただし、 r は 2 体系の相対距離であり、 l は相対軌道角運動量である。また、 v は中心力のポテンシャルを表し、 μ は換算質量である。スピンとアイソスピンは無視している。今、動径成分の波動関数 u_l を n 個の任意の関数で以下のように展開する：

$$u_l(r) = \sum_{i=1}^n c_i^{(l)} \phi_i^{(l)}(r). \quad (10)$$

ただし $c_i^{(l)}$ は展開係数である。すると、汎関数 $\epsilon[u_l]$ は

$$\begin{aligned} \epsilon[u_l] &= \frac{\langle u_l | \hat{H} | u_l \rangle}{\langle u_l | u_l \rangle} \\ &= \frac{\sum_{ij} c_i^{(l)*} c_j^{(l)} \langle \phi_i^{(l)} | \hat{H} | \phi_j^{(l)} \rangle}{\sum_{ij} c_i^{(l)*} c_j^{(l)} \langle \phi_i^{(l)} | \phi_j^{(l)} \rangle}, \end{aligned} \quad (11)$$

与えられ、束縛問題は汎関数 $\epsilon[u_l]$ の停留値を求める問題に帰着する。つまり、展開係数 $c_i^{(l)}$ を変分パラメータとして、汎関数の変分が

$$\frac{\partial}{\partial c_i^{(l)*}} \epsilon[u_l] = 0, \quad (12)$$

を満たすように $c_i^{(l)}$ を決める。この左辺は

$$\frac{\partial}{\partial c_i^{(l)*}} \epsilon[u_l] = \frac{\sum_j c_j^{(l)} \langle \phi_i^{(l)} | \hat{H} | \phi_j^{(l)} \rangle}{\sum_{ij} c_i^{(l)*} c_j^{(l)} \langle \phi_i^{(l)} | \phi_j^{(l)} \rangle} - \frac{\sum_{ij} c_i^{(l)*} c_j^{(l)} \langle \phi_i^{(l)} | \hat{H} | \phi_j^{(l)} \rangle \sum_j c_j^{(l)} \langle \phi_i^{(l)} | \phi_j^{(l)} \rangle}{\left[\sum_{ij} c_i^{(l)*} c_j^{(l)} \langle \phi_i^{(l)} | \phi_j^{(l)} \rangle \right]^2}, \quad (13)$$

と計算できるため、式 (12) は固有値方程式

$$\sum_j \left[\mathcal{H}_{ij}^{(l)} - E \mathcal{N}_{ij}^{(l)} \right] c_j^{(l)} = 0, \quad (14)$$

として表すことができる。ただし、

$$E = \frac{\sum_{ij} c_i^{(l)*} c_j^{(l)} \langle \phi_i^{(l)} | \hat{H} | \phi_j^{(l)} \rangle}{\sum_{ij} c_i^{(l)*} c_j^{(l)} \langle \phi_i^{(l)} | \phi_j^{(l)} \rangle}, \quad (15)$$

$$\mathcal{H}_{ij}^{(l)} = \langle \phi_i^{(l)} | \hat{H} | \phi_j^{(l)} \rangle, \quad (16)$$

$$\mathcal{N}_{ij}^{(l)} = \langle \phi_i^{(l)} | \phi_j^{(l)} \rangle, \quad (17)$$

である。また、ハミルトニアン of 行列要素は $\hat{H} = \hat{T}_{\text{rel}} + \hat{V}$ のように、相対運動エネルギー項 $\hat{T}_{\text{rel}}$ と相互作用項 $\hat{V}$ に分けることで、

$$\mathcal{H}_{ij}^{(l)} = \mathcal{T}_{ij}^{(l)} + \mathcal{V}_{ij}^{(l)}, \quad (18)$$

$$\mathcal{T}_{ij}^{(l)} = \langle \phi_i^{(l)} | \hat{T}_{\text{rel}} | \phi_j^{(l)} \rangle, \quad (19)$$

$$\mathcal{V}_{ij}^{(l)} = \langle \phi_i^{(l)} | \hat{V} | \phi_j^{(l)} \rangle, \quad (20)$$

として計算できる。

式 (14) は行列を使って以下のように表現することができる:

$$\left[\begin{pmatrix} \mathcal{H}_{ij}^{(l)} \end{pmatrix} - E \begin{pmatrix} \mathcal{N}_{ij}^{(l)} \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} c_j^{(l)} \end{pmatrix} = 0. \quad (21)$$

式 (14) あるいは式 (21) は一般化固有値問題と呼ばれる。直交基底、すなわち $\mathcal{N}_{ij}^{(l)} = \langle \phi_i^{(l)} | \phi_j^{(l)} \rangle = \delta_{ij}$ を満たす基底を用いれば、ノルム行列は単位行列になり、式 (21) は通常の固有値方程式になる。

一般化固有値問題は通常、二重対角化の方法で解く。これは、まずノルムの対角化による直交基底を用意する第一ステップと、直交基底によるハミルトニアン の対角化による第二ステップを駆使する方法である。この方法を用いれば、通常の対角化の計算を二度実行すれば一般化固有値問題を解くことができる。一方、実際の数値計算では、一般化固有値問題を解くモジュールやパッケージが広く普及しているため、これを使うのが便利である。

Exercise 2.1 — 重陽子を変分で解こう —

基底関数にガウス関数を用いて、重陽子の Schrödinger 方程式を変分で解こう (付録 A を参照)。軌道角運動量は $l = 0$ としてよい。ポテンシャルには π 中間子交換に起因する湯川型の中心力

$$v(r) = -g^2 \frac{e^{-m_\pi r}}{r}, \quad (22)$$

を用いよう。ただし、 m_π は π 中間子の質量である。実験値と整合する重陽子の基底状態のエネルギーを与える g^2 を求めよう。また、無次元化した結合定数 $\tilde{g}^2 = g^2/(\hbar c)$ と、Coulomb 力での無次元化した結合定数 $\alpha = e^2/(\hbar c)$ (すなわち微細構造定数) とを比較しよう。 $\tilde{g}^2 \gg \alpha$ となっているはずであり、これが強い相互作用の特徴的な関係である。

次に、動径成分の波動関数を式 (10) で計算し、 r の関数として描画しよう。さらに、式 (A.21) を使って、対応する運動量空間での波動関数も描画しよう。

なお、式 (A.9) に基づいて、ガウス関数のレンジを等比級数で与えることにしよう。具体的には、以下のような基底を用いることにしよう:

1. 基底の数: $n = 20$
2. ガウス関数のレンジの最小値: $b_1 = 0.5 \text{ fm}$
3. ガウス関数のレンジの最大値: $b_n = 20.0 \text{ fm}$

このとき、式 (A.9) より、等比 ρ は $\rho = (b_n/b_1)^{1/(n-1)} \sim 1.2$ となる。

また、一般化固有値問題を解く Python のモジュールは、例えば `numpy.linalg.eig`,

`scipy.linalg.eig`, `scipy.linalg.eigh`, `scipy.sparse.linalg.eigs` などがある。

付録 A ギャウス関数展開法

A.1 波動関数

A.1.1 基底と重なり積分

動径方向の波動関数を、ギャウス関数を基底として以下のように展開する:

$$\frac{u_l(r)}{r} = \sum_{i=1}^n c_i^{(l)} \varphi_i^{(l)}(r), \quad (\text{A.1})$$

$$\varphi_i^{(l)}(r) = \frac{\phi_i^{(l)}(r)}{r}, \quad (\text{A.2})$$

$$\phi_i^{(l)}(r) = N_i^{(l)} r^{l+1} \exp[-\nu_i r^2]. \quad (\text{A.3})$$

このような展開をギャウス関数展開法 (Gaussian expansion method; GEM) と呼ぶ [2]。なお、ギャウス関数のレンジパラメータ ν_i はここでは実数とする。

まず、基底関数の重なり積分、つまり式 (17) で与えられるノルムの行列要素は以下のように計算できる:

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_{ij}^{(l)} &= \langle \varphi_i^{(l)} | \varphi_j^{(l)} \rangle \\ &= \int dr \phi_i^{(l)}(r) \phi_j^{(l)}(r) \\ &= N_i^{(l)} N_j^{(l)} \int dr r^{2(l+1)} \exp[-(\nu_i + \nu_j) r^2] \\ &= N_i^{(l)} N_j^{(l)} \frac{(2l+1)!!}{2^{l+2}} \sqrt{\frac{\pi}{(\nu_i + \nu_j)^{2l+3}}}. \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

ここで、規格化因子 $N_i^{(l)}$ は $\langle \phi_i^{(l)} | \phi_i^{(l)} \rangle = 1$ という条件より、以下で与えられる:

$$N_i^{(l)} = \sqrt{\frac{2^{l+2}}{(2l+1)!!}} \left[\frac{(2\nu_i)^{2l+3}}{\pi} \right]^{\frac{1}{4}}. \quad (\text{A.5})$$

これより、式 (A.4) は

$$\mathcal{N}_{ij}^{(l)} = (\beta_{ij})^{l+\frac{3}{2}}, \quad (\text{A.6})$$

$$\beta_{ij} = \frac{2\sqrt{\nu_i \nu_j}}{\nu_i + \nu_j} = \frac{2b_i b_j}{b_i^2 + b_j^2}, \quad (\text{A.7})$$

という形に書き換えることができる。ここで、ギャウス関数のレンジ b_i は $\nu_i = 1/b_i^2$ という関係を満たす。

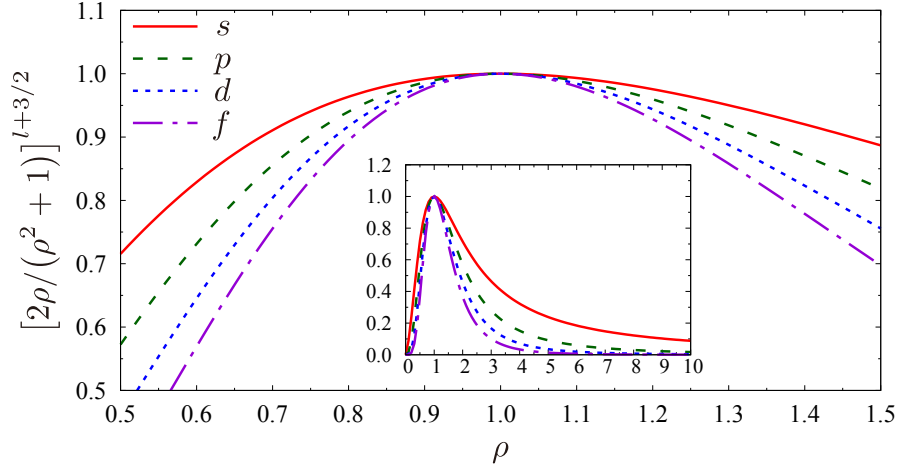


図1 ρ の関数として表した重なり積分 $\langle \phi_i^{(l)} | \phi_{i+1}^{(l)} \rangle = [2\rho/(\rho^2 + 1)]^{l+3/2}$ の値。軌道角運動量 l の値は $l = 0$ (s), $l = 1$ (p), $l = 2$ (d) および $l = 3$ (f) と表現してある。

なお、 u_l のノルムは

$$\begin{aligned} \langle u_l | u_l \rangle &= \sum_{ij} c_i^{(l)} c_j^{(l)} \langle \phi_i^{(l)} | \phi_j^{(l)} \rangle \\ &= \sum_{ij} c_i^{(l)} c_j^{(l)} \mathcal{N}_{ij}^{(l)}, \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

で与えられる。

次に、ガウス関数のレンジの組 $\{b_i\}$ をどのように決めるかについて考えよう。通常これは等比級数で表現する (ρ を等比とする):

$$b_n = b_1 \rho^{n-1}. \quad (\text{A.9})$$

このように等比級数を採用する理由は、以下の計算から理解できる。式 (A.6) を使って、隣り合う基底の重なり積分を計算すると、

$$\langle \phi_i^{(l)} | \phi_{i+1}^{(l)} \rangle = \left(\frac{2\rho}{\rho^2 + 1} \right)^{l+\frac{3}{2}}, \quad (\text{A.10})$$

を得ることができ、これは i に依存しないことがわかる。式 (A.1) の展開は隣り合う基底の重なり積分が1に近いほど早く収束する。この収束をうまく得るには、式 (A.10) が便利である。つまり、例えば $\rho = 1$ であれば、式 (A.10) は $\langle \phi_i^{(l)} | \phi_{i+1}^{(l)} \rangle = 1$ となり、 l に依存しなくなる。しかし、当然、 $\rho = 1$ では b_i を b_1 から変えることができない。したがって、実際の計算では、 $\rho \gtrsim 1.1$ などとすることで、 $\langle \phi_i^{(l)} | \phi_{i+1}^{(l)} \rangle$ をなるべく大きくする (図1 参照)。

A.1.2 運動量分布

一般的なフーリへ変換を考えるために、動径成分だけでなく、角度成分も含めて波動関数を定義しておこう:

$$\langle \mathbf{r} | \psi_{lm} \rangle = \psi_{lm}(\mathbf{r}) = R_l(r) Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}}), \quad (\text{A.11})$$

$$R_l(r) = \frac{u_l(r)}{r}. \quad (\text{A.12})$$

ただし、 Y_{lm} は球面調和関数であり、 $\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{r}/r$ である。この表式に基づくと、運動量空間での波動関数は以下のフーリへ変換で与えられる:

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}_{lm}(\mathbf{k}) &= \langle \mathbf{k} | \psi_{lm} \rangle \\ &= \int d\mathbf{r} \langle \mathbf{k} | \mathbf{r} \rangle \langle \mathbf{r} | \psi_{lm} \rangle \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d\mathbf{r} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \langle \mathbf{r} | \psi_{lm} \rangle \\ &= \frac{4\pi}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{\lambda\mu} (-i)^\lambda Y_{\lambda\mu}(\hat{\mathbf{k}}) \int dr r^2 j_\lambda(kr) R_l(r) \int d\hat{\mathbf{r}} Y_{\lambda\mu}^*(\hat{\mathbf{r}}) Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}}) \\ &= \frac{4\pi}{(2\pi)^{3/2}} (-i)^l Y_{lm}(\hat{\mathbf{k}}) \int dr r^2 j_l(kr) R_l(r). \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

ここで、

$$\mathbb{1} = \int d\mathbf{r} |\mathbf{r}\rangle \langle \mathbf{r}|, \quad (\text{A.14})$$

$$\langle \mathbf{k} | \mathbf{r} \rangle = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}, \quad (\text{A.15})$$

である。また、平面波は Rayleigh の公式

$$e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} = 4\pi \sum_{\lambda\mu} (-i)^\lambda j_\lambda(kr) Y_{\lambda\mu}(\hat{\mathbf{k}}) Y_{\lambda\mu}^*(\hat{\mathbf{r}}), \quad (\text{A.16})$$

によって部分波展開の形で表現している。ただし、 j_λ は球ベッセル関数である。さらに球面調和関数の直交性も用いた:

$$\int d\hat{\mathbf{r}} Y_{\lambda\mu}^*(\hat{\mathbf{r}}) Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}}) = \delta_{\lambda l} \delta_{\mu m}. \quad (\text{A.17})$$

さて、運動量空間での動径成分の波動関数を、式 (A.13) の球面調和関数を除いた部分として定義しよう:

$$\tilde{R}_l(k) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} (-i)^l \int dr r^2 j_l(kr) R_l(r). \quad (\text{A.18})$$

今興味があるのは、角運動量が $l = 0$ のみであり、なおかつ座標空間での動径波動関数を式 (A.1) のようにガウス基底で展開している。このとき、 $j_0(z) = \sin(z)/z$ より、式 (A.18) が含む積分は

$$\int dr r^2 j_0(kr) R_0(r) = \sum_i c_i^{(0)} N_i^{(0)} \int dr r^2 \frac{\sin(kr)}{kr} e^{-\nu_i r^2}, \quad (\text{A.19})$$

と書ける。この積分は解析的に計算できる:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty dr r^2 \frac{\sin(kr)}{kr} e^{-\nu_i r^2} &= \frac{1}{2k^3} \text{Im} \left[\int_{-\infty}^\infty dz z \exp \left(-\frac{\nu_i z^2}{k^2} + iz \right) \right] \\ &= \frac{1}{4\nu_i} \sqrt{\frac{\pi}{\nu_i}} e^{-\frac{k^2}{4\nu_i}}. \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

ただし、 $z = kr$ として変数変換している。以上より、運動量空間での S 波の動径波動関数として以下を得る:

$$\tilde{u}_0(k) = k \tilde{R}_0(k) = \sum_i (2\nu_i)^{-3/2} c_i^{(0)} N_i^{(0)} k e^{-\frac{k^2}{4\nu_i}}. \quad (\text{A.21})$$

A.2 行列要素の計算

A.2.1 ノルムの行列要素

式 (17) のノルム行列要素は既に式 (A.6) で与えている。あらためて書くと

$$\mathcal{N}_{ij}^{(l)} = (\beta_{ij})^{l+\frac{3}{2}}, \quad (\text{A.22})$$

$$\beta_{ij} = \frac{2\sqrt{\nu_i \nu_j}}{\nu_i + \nu_j} = \frac{2b_i b_j}{b_i^2 + b_j^2}, \quad (\text{A.23})$$

である。

A.2.2 運動エネルギーの行列要素

GEM では、式 (19) は以下のように計算できる:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{ij}^{(l)} &= \left\langle \varphi_i^{(l)} \left| \hat{T}_{\text{rel}} \right| \varphi_j^{(l)} \right\rangle, \\ &= -\frac{\hbar^2}{2\mu} \int dr \phi_i^{(l)}(r) \left[\frac{d^2}{dr^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] \phi_j^{(l)}(r). \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

さらに、

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dr^2} \phi_j^{(l)}(r) &= N_j^{(l)} \frac{d^2}{dr^2} [r^{l+1} \exp(-\nu_j r^2)] \\ &= \left[\frac{l(l+1)}{r^2} - 2\nu_j(2l+3) + 4\nu_j^2 r^2 \right] \phi_j^{(l)}(r), \end{aligned} \quad (\text{A.25})$$

であることから、式 (A.24) は以下で与えられる:

$$\mathcal{T}_{ij}^{(l)} = \frac{\hbar^2 \nu_j}{2\mu} \left[2(2l+3) \langle \varphi_i^{(l)} | \varphi_j^{(l)} \rangle - 4\nu_j \langle \varphi_i^{(l)} | r^2 | \varphi_j^{(l)} \rangle \right]. \quad (\text{A.26})$$

ここで、第一項の $\langle \varphi_i^{(l)} | \varphi_j^{(l)} \rangle$ は式 (A.6) で与えられる。一方、第二項については、以下のように計算できる:

$$\begin{aligned} \langle \varphi_i^{(l)} | r^2 | \varphi_j^{(l)} \rangle &= N_i^{(l)} N_j^{(l)} \int dr r^{2(l+2)} \exp[-(\nu_i + \nu_j) r^2] \\ &= N_i^{(l)} N_j^{(l)} \frac{(2l+3)!!}{2^{l+3}} \sqrt{\frac{\pi}{(\nu_i + \nu_j)^{2l+5}}} \\ &= \frac{2l+3}{2(\nu_i + \nu_j)} (\beta_{ij})^{l+\frac{3}{2}}. \end{aligned} \quad (\text{A.27})$$

ただし、式 (A.5) および式 (A.7) を用いた。結局、運動エネルギーの行列要素は以下の形に帰着する:

$$\mathcal{T}_{ij}^{(l)} = \frac{\hbar^2}{\mu} (2l+3) \frac{\nu_i \nu_j}{\nu_i + \nu_j} (\beta_{ij})^{l+\frac{3}{2}}. \quad (\text{A.28})$$

A.2.3 2 体行列要素 —湯川ポテンシャル—

式 (9) の相互作用として湯川ポテンシャルを考えよう。すなわち、

$$v(r) = -g^2 \frac{e^{-m_\alpha r}}{r}, \quad (\text{A.29})$$

である。このとき、2 体行列要素は

$$\mathcal{V}_{ij}^{(l)} = -g^2 N_i^{(0)} N_j^{(0)} \int dr r e^{-(\nu_i + \nu_j) r^2 - m_\alpha r}. \quad (\text{A.30})$$

となる。式 (A.30) の積分は解析的に計算できる。今、求めたい積分を

$$G \equiv \int_0^\infty dr r e^{-\nu r^2 - m_\alpha r}, \quad (\text{A.31})$$

とおく。ここで、 $\nu = \nu_i + \nu_j$ である。平方完成と変数変換を用いると、 G は以下のように書き換えることができる:

$$\begin{aligned} G(m_\alpha) &= e^{\frac{m_\alpha^2}{4\nu}} \int_0^\infty dr r e^{-\nu(r + \frac{m_\alpha}{2\nu})^2} \\ &= e^{\nu\gamma^2} \int_\gamma^\infty dx (x - \gamma) e^{-\nu x^2} \\ &= I_1 - \gamma I_0, \end{aligned} \quad (\text{A.32})$$

$$I_k \equiv e^{\nu\gamma^2} \int_\gamma^\infty dx x^k e^{-\nu x^2}. \quad (\text{A.33})$$

ただし、 $\gamma = m_\alpha/(2\nu)$ および $x = r + \gamma$ である。

I_k の積分は解析的に実行できる。まず、 I_0 が相補誤差関数に等しいことを示そう。すなわち、

$$\begin{aligned} I_0 &= \frac{1}{\sqrt{\nu}} e^{\nu\gamma^2} \int_{\sqrt{\nu}\gamma}^{\infty} dX e^{-X^2} \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{1}{\sqrt{\nu}} e^{\nu\gamma^2} \operatorname{erfc}(\sqrt{\nu}\gamma). \end{aligned} \quad (\text{A.34})$$

である。ここで、相補誤差関数 erfc は誤差関数 erf を使って以下で与えられる：

$$\operatorname{erfc}(x) = 1 - \operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty dt e^{-t^2} - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x dt e^{-t^2} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty dt e^{-t^2}. \quad (\text{A.35})$$

次に I_1 の計算であるが、これには

$$\frac{d}{dx} e^{-\nu x^2} = -2\nu x e^{-\nu x^2}, \quad (\text{A.36})$$

を用いると便利である。式 (A.36) より、

$$\begin{aligned} I_1 &= -\frac{1}{2\nu} e^{\nu\gamma^2} \int_\gamma^\infty dx \frac{d}{dx} e^{-\nu x^2} \\ &= -\frac{1}{2\nu} e^{\nu\gamma^2} \left[e^{-\nu x^2} \right]_\gamma^\infty \\ &= \frac{1}{2\nu}, \end{aligned} \quad (\text{A.37})$$

と計算することができる。

参考文献

- [1] 玉垣良三, 大学院原子核物理 (講談社サイエンティフィク, 1996), pp. 117–181, 4.2 核力の概括的性質.
- [2] E. Hiyama, Y. Kino, and M. Kamimura, Prog. Part. Nucl. Phys. **51**, 223 (2003).